הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 9 חזרה

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' נוסף, פברואר 2007 .
יהיו X ו ־ Y שני מ"מ ב"ת ושווי התפלגות. נניח שמתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.3 & -1 \le x < 6 \\ \frac{x}{20} & 6 \le x < 10 \\ 1 & x \ge 10 \end{cases}$$

מהו $P(X+Y>0)$? סמנו את התשובה הנכונה.

(א) 0.91
(ב) 0.25
(ג) 0.29
(ד) 0.7
(ה) אף לא אחד מהנ"ל

פתרון:
תשובה א' נכונה.
ראשית נשים לב שפונקצית ההתפלגות של X אינה רציפה: יש לה נק' אי רציפות ב $x=-1$ וגם ב $x=10$.
לכן X אינו מ"מ רציף. בנוסף, X אינו מ"מ בדיד משום שבקטע $[6,10)$ פונקצית ההתפלגות שלו אינה פונקצית מדרגות.
הערך -1 מתקבל בהסתברות 0.3, הקטע $(-1,6)$מתקבל בהסתברות 0, הקטע $[6,10)$ מתקבל בהסתברות 0.2, והערך 10 מתקבל בהסתברות 0.5.
כעת נביט במאורע **המשלים** למאורע שלגביו נשאלנו: כדי שיתקיים $X+Y \le 0$ צריך להתקיים $X=Y=-1$ משום שאם אחד המ"מ אי שלילי אז ערכו לפחות 6 ומכיוון שהמ"מ האחר חסום מלמטה על ידי -1, סכומם חסום מלמטה על ידי 5. מכאן:

$$P(X+Y \le 0) = P(X=-1, Y=-1) = P(X=-1) \cdot P(Y=-1) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$$

כאשר המעבר השני נובע מאי תלות (אחרת הסתברות החיתוך אינה שווה למכפלת ההסתברויות!).
אנחנו מעוניינים במאורע המשלים ולכן:

$$P(X+Y>0) = 1 - P(X+Y \le 0) = 1 - 0.09 = 0.91$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א', ינואר 2007

יהי X מ"מ המקבל תשעה ערכים שונים בהסתברות $\frac{1}{9}$ כל אחד. ידוע ש $\mathbb{E}X = 0.5$ ו - $Var(X) = 1$. מי מבין הבאים **אינו** אפשרי:

(א) $P(X = 0.5) = \frac{1}{9}$.

(ב) $P(X = 3.5) = \frac{1}{9}$.

(ג) $\mathbb{E}(X^{2007}) < 0$.

(ד) $P(X > 0.5) = \frac{7}{9}$.

(ה) אף אחד מהנ"ל.

פתרון:

תשובה: טענה ב' אינה אפשרית, כלומר לא יתכן ש 3.5 הוא אחד הערכים ש - X מקבל. הסיבה: הערך 3.5 רחוק מדי מהתוחלת ו"מנפח" את השונות אל מעבר לערך שהיא אמורה לקבל לפי נתוני השאלה.

נראה זאת: יהיו $\{x_i\}_{i=1}^{9}$ הערכים שמקבל X אז מתקיים

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{9} \cdot (x_i - 0.5)^2 = 1$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{9} (x_i - 0.5)^2 = 9$$

כדי להראות שטענה ב' בלתי אפשרית, נניח בה"כ ש $x_1 = 3.5$. כעת המחובר הראשון בסכום תורם:

$$(x_1 - 0.5)^2 = (3.5 - 0.5)^2 = 3^2 = 9$$

כלומר המחובר הראשון לבדו תורם 9 ולכן הסכום גדול בהכרח מ - 9. הסבר: מדובר בסכום של 9 מחוברים שלפחות 8 מהם אי שליליים (משום ש X מקבל 9 ערכים שונים ולכן גם אחד מהם הוא 0.5, מה שגורר שאחד המחוברים הוא אפס, עדיין ישנם 8מחוברים אחרים חיוביים ממש).

נראה דרך שקולה להראות שטענה ב' אינה אפשרית. ידוע לנו ש $\mathbb{E}X = 0.5$ ו - $Var(X) = 1$ לכן על פי הנוסחא לשונות:

$$\mathbb{E}X^2 = Var(X) + (\mathbb{E}X)^2 = 1 + 0.5^2 = 1.25$$

בניגוד למ"מ X, המ"מ X^2 מקבל רק ערכים אי שליליים (ולפחות 8 מהם חיוביים ממש). אם נניח ש $x_1 = 3.5$ נקבל:

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{9} \cdot x_i^2 = \frac{1}{9} \cdot 3.5^2 + \sum_{i=2}^{9} \frac{1}{9} \cdot x_i^2 = \frac{49}{36} + positve > 1.25$$

וזאת בסתירה לנתוני השאלה.

3. במבוך 3 דלתות הנראות זהות. אחת מהן מובילה למסלול מעגלי בן 7 שעות (כלומר מחזירה לאותה נקודה לאחר הליכה של 7 שעות), השניה מובילה למסלול מעגלי בן 5 שעות, ואילו השלישית מובילה ליציאה מהמבוך במסלול בן 3 שעות. הניחו כי מרגע שנבחרת דלת מסוימת לא ניתן לחזור לאחור ויש להשלים את המסלול אליו היא מובילה.
אדם הכלוא במבוך פותח דלתות עד שהוא יוצא לחפשי.
יהי X מספר הפעמים שהוא פתח דלת עד שיצא לחפשי, ויהי Y מספר השעות שחלפו עד ליציאתו מהמבוך.

(א) מהי ההתפלגות של X ומהי תוחלתו?

(ב) מהי התוחלת של Y?

פתרון:

(א) האדם מנסה לפתוח דלתות עד ההצלחה הראשונה ולכן $X \sim Geom(1/3)$. מכאן ש $\mathbb{E}X = 3$.

(ב) נסמן ב X_i את מספר הפעמים שהאדם פתח את הדלת ה i כאשר $i \in \{3,5,7\}$. בסימון הזה כוונתנו שדלת 3 היא זו שמובילה למסלול בן 3 שעות, דלת 5 מובילה למסלול בן 5 שעות ודלת 7 למסלול בן 7 שעות. מכאן ש:

$$Y = 3 \cdot X_3 + 5 \cdot X_5 + 7 \cdot X_7 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot X_5 + 7 \cdot X_7$$

שימו לב ש X_3 הוא משתנה מקרי מנוון: ידוע שנבחר בדלת 3 בדיוק פעם אחת, משום שהיא מובילה ליציאה ובכך מסתיים הניסוי.
נרצה לחשב את את התוחלת של Yבעזרת משפט התוחלת השלמה:

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \mathbb{E}(3 + 5 \cdot \mathbb{E}(X_5 \mid X = x) + 7 \cdot \mathbb{E}(X_7 \mid X = x)$$

כעת נותר לחשב את התוחלות המותנות $\mathbb{E}(X_7 \mid X = x)$ ו - $\mathbb{E}(X_5 \mid X = x)$. לשם כך נמצא את ההתפלגויות המותנות המתאימות:

$$X_5, X_7 \mid X = x \sim Bin(x-1, 0.5)$$

הסבר: בהינתן שידוע לנו שמספר הפעמים שהאדם במבוך פתח דלת הוא x, ובהתחשב בכך שאת דלת 3 הוא פתח פעם אחת בדיוק, יוצא שאת הדלתות 5 ו - 7 הוא פתח $x-1$ פעמים בסה"כ. בכל אחת מאותן הפעמים שידוע שבהן הוא לא פתח את דלת 3, הוא למעשה בחר דלת בהסתברות שווה מבין דלתות 5 ו - 7. כלומר, בשני המקרים מדובר בהתפלגויות בינומיות עם $x-1$ נסיונות והסתברות להצלחה 0.5. כעת:

$$\mathbb{E}(X_5 \mid X = x) = \mathbb{E}(X_7 \mid X = x) = \frac{x-1}{2}$$

ומכאן ש

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \mathbb{E}(3 + 5 \cdot \mathbb{E}(X_5 \mid X = x) + 7 \cdot \mathbb{E}(X_7 \mid X = x) = \\
\mathbb{E}\left(3 + 5 \cdot \frac{X-1}{2} + 7 \cdot \frac{X-1}{2}\right) = \mathbb{E}\left(3 + 6 \cdot (X-1)\right) = \\
\mathbb{E}(6X - 3) = 6\mathbb{E}X - 3 = 6 \cdot 3 - 3 = 15
\end{aligned}$$