הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ תרגול 8
תוחלת שלמה ותוחלת של מ"מ רציף

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. ממבחן של ד"ר ערן שמעיה, מועד א' ינואר 2015
מטילים קוביה הוגנת עד שמקבלים פעמיים את התוצאה 6. יהי X מספר ההטלות.

(א) מהי התוחלת של X?

(ב) יהי Y_5 מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5. מהי התוחלת של Y_5?

(ג) מהי התוחלת המותנית $\mathbb{E}(Y_5 \mid X = 10)$, כלומר התוחלת של מספר הפעמים שקיבלנו 5 בהינתן שהיו בסה"כ 10 הטלות?

פתרון:

(א) X הוא סכום של שני משתנים גיאומטרים עם פרמטר $\frac{1}{6}$. שתוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות נקבל:

$$\mathbb{E}X = 2 \cdot \mathbb{E}(Geom(\frac{1}{6})) = 2 \cdot 6 = 12$$

פתרון שקול לחלוטין לפתרון שהראינו מתבסס על כך ש $X \sim NB(2, {}^1/_6)$ ולכן, לפי הנוסחה של תוחלת משתנה בינומי שלילי:

$$\mathbb{E}X = \frac{n}{p} = \frac{2}{{}^1/_6} = 12$$

(ב) נסמן ב Y_i את מספר ההטלות שנתנו את התוצאה i. אז מתקיים:

$$X = \sum_{i=1}^{6} Y_i$$

ולכן גם:

$$12 = \mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}Y_i = \mathbb{E}Y_6 + \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}Y_i = 2 + \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}Y_i$$

הסתמכנו על כך $\mathbb{E}X = 12$ (הראינו בסעיף הקודם), ועל כך $Y_6 = 2$ (מ"מ מנוון) ולכן גם $\mathbb{E}Y_6 = 2$.
מהסימטריה של המשתנים $Y_1, ..., Y_5$ נובע:

$$12 = 2 + 5 \cdot \mathbb{E}Y_5$$

ולכן:

$$\mathbb{E}Y_5 = 2$$

(ג) ידוע לנו שהיו בסה"כ 10 הטלות. מתוכן, 2 הטלות נתנו את תוצאה 6. לכן נותרו 8 הטלות שלכל אחת מהן 5 תוצאות אפשריות המתקבלות בהסתברות שווה. באופן כללי אפשר לכתוב:

$$Y_5 \mid X = x \sim Bin(x-2, {}^1\!/_5)$$

ולכן התוחלת המותנית:

$$\mathbb{E}(Y_5 \mid X = x) = \frac{x-2}{5}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}(Y_5 \mid X = 10) = \frac{8}{5}$$

נעזר בתוצאה הכללית של התוחלת המותנית כדי להראות פתרון נוסף לסעיף ב'. מנוסחת ה**תוחלת השלמה** מקבלים:

$$\mathbb{E}Y_5 = \mathbb{E}\mathbb{E}(Y_5 \mid X) = \mathbb{E}(\frac{X-2}{5}) = \frac{\mathbb{E}X - 2}{5} = \frac{12-2}{5} = 2$$

2. ממבחנים שונים של ד"ר שלומי רובינשטיין
יהיו X ו Y שני מ"מ רציפים וב"ת המתפלגים אחיד על הקטע $(0,1)$

(א) חשבו את תוחלת שטחו של הריבוע שאורך הצלע שלו היא X

(ב) חשבו את התוחלת המותנה: $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid Y = y)$

(ג) האם התוחלת: $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid X + Y < 0.2)$ סופית?

פתרון:

(א) יהי $S = X^2$ שטח הריבוע. התבקשנו לחשב את $\mathbb{E}S$. מדובר בתוחלת של פונקציה של מ"מ שאת התפלגותו אנחנו יודעים:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X^2 = \int_0^1 t^2 \cdot f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \cdot 1\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

(ב)

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid Y = y) = \int_0^1 \frac{1}{t+y} \cdot f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t+y} \cdot 1dt = ln(1+y) - ln(y)$$

(ג) מכיוון שחישבנו את התוחלת המותנה, נוכל להעזר בה כדי לחשב (בעזרת נוסחת התוחלת השלמה) את התוחלת הלא מותנית הבאה:

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}) = \int_0^1 \mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid Y=y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid Y=y)\cdot 1dy = \int_0^1 ln(1+y)-ln(y)dy < \infty$$

כעת, לאחר שידוע לנו ש $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}) < \infty$ נוכל לקבוע שגם $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid X+Y < 0.2) < \infty$.
הסבר: אילו התוחלת המותנה היתה אינסופית, ומכיוון שהמאורע שמתנים בו הוא בעל הסתברות חיובית, אז התוחלת השלמה שהיא "ממוצע משוקלל" של התוחלות המותנות היתה אינסופית גם היא.
כלומר:

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}) = \mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid X+Y < 0.2)\cdot Pr(X+Y < 0.2) + \mathbb{E}(\frac{1}{X+Y} \mid X+Y \geq 0.2)\cdot Pr(X+Y \geq 0.2) < \infty$$

המחובר הימני סופי (תוחלת של מ"מ חסום היא סופית), לכן אילו המחובר השמאלי היה אינסוף, גם הסכום היה אינסופי, וזאת בניגדו למה שהראינו.