הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 7
תוחלת של מ"מ בדיד

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. מסדרים חפיסת קלפים סטנדרטית בשורה, יהי Y מספר הזוגות הצמודים של לבבות. חשבו $\mathbb{E}Y$.

פתרון:
השאלה הזו היא דוגמא לכך, שלעיתים עשוי להיות קשה מאוד לחשב את ההתפלגות של משתנה מקרי, אבל קל לחשב את התוחלת שלו. בשאלות מהסוג הזה נציג את המשתנה המקרי שמעניין אותנו כסכום של אינדיקטורים. שימו לב שהאינדקטורים יכולים להיות תלויים, ועובדה זו לא תפריע לנו להשתמש במשפט לפיו תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות.
נגדיר משתנה אינדיקטור Y_i־ האם הקלפים במקומות $i, i+1$ הם לבבות. Y_i תלויים **ושווי התפלגות**. כעת:

$$Y = \sum_{i=1}^{51} Y_i$$

ולכן:

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{51} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{51} \mathbb{E}Y_i = 51 \times \mathbb{E}Y_1$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאינדיקטורים שווי התפלגות: אין סיבה לחשוב ההסיכוי ששני הקלפים הראשונים יהיו לבבות, שונה מהסיכוי ששני קלפים אחרים, נניח הקלפים במקומות ה ־ 40 וה ־ 41, יהיו לבבות. התלות בין המשתנים לא אומרת שהם מתפלגים באופן שונה!
כזכור, עבור משתנה אינדיקטור מתקיים:

$$\mathbb{E}X = P(X=1)$$

ההסתברות ששני הקלפים הראשונים הם לבבות היא:

$$P(Y_1 = 1) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

לכן:

$$\mathbb{E}Y = 51 \times P(Y_1 = 1) = 51 \times \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = 3$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' ינואר 2007
יהי $X \sim Pois(\lambda)$ משתנה מקרי. נגדיר: $Y = |X-1|$. מצאו את $\mathbb{E}Y$.
פתרון:
Xמקבל את הערכים $0,1,2,...$ וכך גם Y.
אם $X=0$, Y מקבל את הערך 1. בכל מקרה אחר, אם $X=k$, Yמקבל את הערך $k-1$ (זה נכון לכל $k=1,2...$). לכן:

$$\mathbb{E}Y = P(X=0)\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot(k-1) = 2P(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot(k-1)$$
$$2P(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot k - \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \frac{2}{e^{\lambda}} + \lambda - 1$$

3. n זוגות מגיעים למלון. לכל זוג חדר שמור, ולכל חדר שני מפתחות. הפקיד מבולבל, ולכן מחלק את המפתחות באקראי. נסמן ב Y את מספר הזוגות שיכולים להכנס לחדרם (מספיק שאחד מבני הזוג יחזיק מפתח מתאים כדי להיכנס לחדר). מהי התוחלת של Y?
פתרון:
נגדיר משתנה אינדיקטור Y_i שמציין האם הזוג הi יכול להכנס לחדרו. כעת:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

לכן:

$$\mathbb{E}[Y] = nE[Y_1] = n \times P(Y_1 = 1)$$

המשתנה Y_1 מקבל את הערך 1 אם לפחות אחד מהמפתחות של החדר נמצא אצל בני הזוג. נחשב דרך המשלים:

$$P(Y_1=1) = 1 - P(Y_1=0) = 1 - \frac{2n-2}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-1} = 1 - \frac{2(n-1)(2n-3)}{2n(2n-1)} = 1 - \frac{(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)}$$
$$= \frac{n(2n-1)-(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)} = \frac{4n-3}{n(2n-1)}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}[Y] = nP(Y_1=1) = \frac{4n-3}{2n-1}$$