הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 6
התפלגויות דו מימדיות

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. שאלה ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד ב' ספטמבר 2006
יהיו X ו ־ Y שני משתנים מקריים שווי התפלגות. מתקיים $X \sim U(0,1)$. מהו $P(Y < X^2)$?
   (א) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{2}$
   (ב) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{3}$
   (ג) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{4}$
   (ד) $\frac{1}{6}$ בין אם הם תלויים או לא
   (ה) אף תשובה אינה נכונה

פתרון:
ראשית, קל לשלול את תשובה ד': אם המשתנים תלויים אז ייתכן ש $X = Y$. במקרה כזה $Y > X^2$ בהסתברות 1. הסבר: $0 \le X \le 1$ ולכן מתקיים בהכרח $Y = X > X^2$.
נותר לחשב את הסתברות המאורע המבוקש אם המשתנים ב"ת. נשים לב שבהינתן $X = x$, מתקיים ש $P(Y < x^2) = x^2$. זאת משום ש Y מתפלג אחיד בקטע $(0,1)$ ו ־ x^2 בהכרח שייך לקטע $(0,1)$. לכן מהסתברות שלמה:

$$P(Y < X^2) = \int_0^1 f_X(x) \cdot P(Y < x^2) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

תשובה ב' נכונה.

2. מטילים מטבע שלוש פעמים (בלתי תלויות). נסמן ב ־ X את מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בשתי ההטלות הראשונות וב ־ Y את מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בשתי ההטלות האחרונות. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X, Y ואת ההתפלגות המותנית $Y \mid X = x$.

פתרון:
מדובר במרחב הסתברות סימטרי ־ ישנן 8 מאורעות בסיסיים ־ $\Omega = \{(0,0,0), (0,0,1) \ldots (1,1,1)\}$ ־ המתקבלים כולם בהסתברות $\frac{1}{8}$. נרשום את הערכים שמקבלים המ"מ X ו ־ Y עבור כל $\omega \in \Omega$:

ω	X	Y
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	1	2
100	1	0
101	1	1
110	2	1
111	2	2

כעת קל למצוא את ההתפלגות המשותפת (כל תא של הטבלה מייצג את חיתוך המאורעות המיוצגים על ידי השורה והעמודה שלו)

Y/X	0	1	2	
0	$1/8$	$1/8$	0	$1/4$
1	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/2$
2	0	$1/8$	$1/8$	$1/4$
	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

חשוב לשים לב לנקודות הבאות:

(א) ההתפלגות השולית של X זהה להתפלגות השולית של Y. אנחנו מצפים לכך משום שאין שום הבדל בין שתי ההטלות הראשונות לבין שתי ההטלות החרונות. זאת דרך לבדוק שלא טעינו - תמיד בדקו שהתשובה שקיבלתם הגיונית.

(ב) ההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים היא בינומית. כלומר $X \sim Bin(2, 1/2)$ וכל גם Y. גם זו תוצאה צפוייה.

(ג) וודאו שההתפלגויות השוליות מסתכמות ל 1.

כעת נביט בהתפלגות המותנית:
אם $X = 0$, בוודאות ההטלה השניה היא "פלי" ולכן ההטלה השנייה תקבע אם Y יקבל את הערכים 0 או 1 בהסתברות שווה

$$Y \mid X = 0 \sim Ber(\frac{1}{2})$$

בדומה, אם $X = 2$, ההטלה השנייה היא בוודאות "עץ" ולכן:

$$Y \mid X = 2 \sim 1 + Ber(\frac{1}{2})$$

אם $X = 1$, אז בהסתברות $\frac{1}{2}$ ה"עץ" מתקבל בהטלה הראשונה, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ הוא מתקבל בהטלה השניה.
לכן, אם נסמן ב Z_i את ההטלה ה i, אז:

$$(Y \mid X = 1) = (Z_2 \mid X = 1) + (Z_3 \mid X = 1) = Ber(\frac{1}{2}) + Z_3 =$$

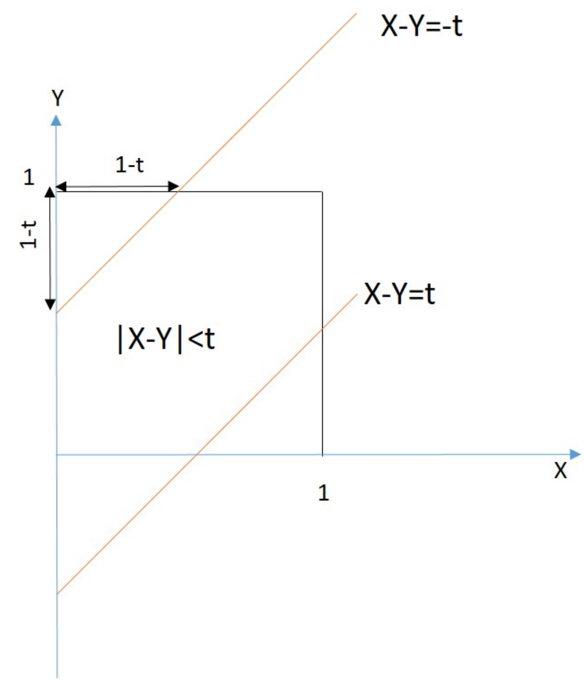
$$Ber(\frac{1}{2}) + Ber(\frac{1}{2}) = Bin(2, \frac{1}{2})$$

כאשר המעבר האחרון הסתמך על העובדה שההטלות בלתי תלויות.
חשוב לשים לב, מרגע שמוצאים את ההתפלגות המשותפת ניתן למצוא את ההתפלגויות השוליות ישירות מהטבלה. למשל כדי למצוא את $Y \mid X = 0$ נביט בשורה שבה $X = 0$ ונראה שהערכים 0 ו - 1 מתקבלים בהסתברות שווה p המקיימת $p = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$. ההתפלגות המאימה לכך היא $Ber(\frac{1}{2})$.

3. מבחינה של ד"ר אסף כהן, ינואר 2013
יהיו $X, Y \sim U(0,1)$ זוג מ"מ רציפים ב"ת. נגדיר $Z = |X - Y|$. מצאו את פונקצית הצפיפות של Z.
פתרון:
Z יכול לקבל ערכים בקטע $(0,1)$. ראשית נמצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת שלו. עבור $t \in (0,1)$ מתקיים:

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(|X - Y| \le t) = P(-t \le X - Y \le t)$$

בשלב הזה כדאי לשרטט את התחום (במישור XY) שמגדיר אי השוויון $-t \le X - Y \le t$:



קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים המוגדר על ידי שני המשולשים החופפים.

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(|X - Y| \le t) = P(-t \le X - Y \le t) =$$
$$1 - 2 \times \frac{(1-t)^2}{2} = 1 - (1-t)^2$$

הערה: באופן כללי, השלב של מציאת ההסתברות של מאורע דורש לחשב אינגרל כפול של פונקצית הצפיפות המשותפת מעל התחום המוגדר על ידי המשולשים. אבל במקרה שלנו פונקצית הצפיפות היא מכפלת הצפיפיות השוליות (בגלל אי התלות של המשתנים), וכל אחת מהצפיפיות השוליות קבועה ושווה ל 1. לכן

האינטגרל שווה לשטח התחום.
פנקצית ההתפלגות:

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1-t)^2 & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \end{cases}$$

ופונקצית הצפיפות:

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2 \cdot (1-t) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$