הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 5
משתנים מקריים רציפים

יותם חרובי

סמסטר א׳ תשע״ח

1. יהי $X \sim U(0,10)$ מ״מ **רציף**. נגדיר מ״מ חדש $Y = X^2$. מצאו את ההתפלגות של Y (פונקצית צפיפות ופונקצית התפלגות מצטברת).

פתרון:
בשאלות מהסוג הזה, שבהן מגדירם מ״מ חדש כפונקציה של מ״מ שהתפלגותו ידועה, רצוי להתחיל את הפתרון במציאת תחום הערכים שהמ״מ החדש יכול לקבל. במקרה שלנו Y יכול לקבל כל ערך בקטע $[0,100]$ **ואף ערך מחוץ לקטע הזה**.
בשלב השני של הפתרון נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y ־ $F_Y(y)$ ־ עבור $y \in [0,100]$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) = \frac{\sqrt{y}}{10}$$

כעת נרשום את פונקצית ההתפלגות המצטברת באופן מלא. (לא לשכוח את השלב הזה):

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{10} & 0 < y \leq 100 \\ 1 & 100 < y \end{cases}$$

לבסוף נגזור את פונקצית ההתפלגות המצטברת (כל אינטרוול בנפרד):

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{20\sqrt{y}} & 0 < y \leq 100 \\ 0 & 100 < y \end{cases}$$

2. יהי X משתנה מקרי מעריכי $X \sim Exp(\lambda)$. כיצד מתפלג **החלק השלם** של X?

פתרון:
נסמן ב Y את החלק השלם של X. נשים לב שמהגדרתו של Y נובע כי הוא מ״מ בדיד המקבל את הערכים $0,1,2,\ldots$. עבור כל k טבעי או 0 מתקיים:

$$P(Y=k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda})$$

נסמן $p = 1-e^{-\lambda}$, $q = 1-p = e^{-\lambda}$ ונקבל:

$$P(Y=k) = q^k \cdot p$$

כלומר, המ"מ המוגדר על ידי $Z = Y + 1$ מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $p = 1 - e^{-\lambda}$. או בניסוח שקול, ההתפלגות של Y היא התפלגות גיאומטרית מוזזת שמאלה ב - 1.

3. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד ב' ספטמבר 2006 .
יהיו X, Y, Zשלושה משתנים מקריים שווי התפלגות. ידוע ש $X \sim B(\frac{1}{2})$, $Y \sim B(p)$ ו - $Z \sim B(p)$.
נגדיר $W = X + Y + Z$. נתייחס להסתברות של המאורע "W זוגי". סמנו את התשובה הנכונה.

(א) בכל מקרה הסתברות זו שווה ל 0.5.

(ב) יתכן שהסתברות זו שווה ל 0.5 רק אם שלושת המשתנים המקריים בלתי תלויים.

(ג) אם X ב"ת ב -Y וגם X ב"ת ב - Z אז הסתברות זו שווה ל 0.5, אך תשובה א' אינה נכונה.

(ד) יתכן שהסתברות זו שווה לאפס.

(ה) אף תשובה אינה נכונה.

פתרון:
תשובה ד' נכונה.
ראשית נשים לב שנתון שהמשתנים שווי התפלגות לכן $X, Y, Z \sim B(\frac{1}{2})$. כעת נביט בדוגמא הבאה:

$$P(X=0, Y=1, Z=0) = P(X=0, Y=0, Z=1) =$$
$$P(X=1, Y=0, Z=0) = P(X=1, Y=1, Z=1) = \frac{1}{4}$$

מדוע זו דוגמא "תקינה"? משום שההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים היא $B(\frac{1}{2})$.

סכום המשתנים הוא זוגי בהסתברות 0 (כלומר תמיד אי זוגי). לכן ד' נכונה וניתן לשלול את תשובה א'.
גם תשובה ג' נשללת על ידי דוגמא זו משום ש X ב"ת ב - Y וגם ב"ת ב - Z (משום ש $Y \mid X$ מתפלג $B(\frac{1}{2})$ וכך גם $Z \mid X$) אבל ההסתברות ש W זוגי אינה 0.5 אלא אפס.
תשובה ב' אינה נכונה משום שאפשר למצוא דוגמא שבה המשתנים תלויים אבל ההסתברות ש W זוגי היא $\frac{1}{2}$. למשל אם X ב"ת באחרים אבל מבין Y ו - Z בדיוק אחד מהם מקבל את הערך 1. לכן רק X קובע את זוגיות הסכום, וזה קורה בהסתברות 0.5.