הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 4
משתנים מקריים בדידים

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. בבריכה 5 דגי זהב ו ־ 15 קרפיונים. דייג דג 6 דגים ללא החזרה. יהי X מספר דגי הזהב שהדייג דג, Y מספר דגי הזהב שנשארו בבריכה.
   (א) כיצד מתפלג X?
   (ב) כיצד מתפלג Y?
   (ג) כיצד מתפלג $X+Y$?
   (ד) נניח שלאחר כל פעם שהדייג תופס דג, הוא משחרר אותו, איך מתפלג X?

   פתרון:
   (א) $X \sim HG(n=6, a=5, b=15)$
   (ב) $Y \sim HG(n=14, a=5, b=15)$
   (ג) נשים לב ש $Y = 5 - X$. לכן $X+Y=5$ הוא מספר קבוע (משתנה מקרי מנוון)
   (ד) $X \sim Bin(6, \frac{5}{20})$ (הוצאה עם החזרה)

2. מערבבים היטב חפיסת קלפים סטנדרטית, והופכים קלפים עד שמקבלים לב בפעם הראשונה. יהי X משתנה מקרי הסופר את הקלפים שהפכנו. כיצד מתפלג X?

פתרון:
ראשית נבין אילו ערכים X יכול לקבל. X יכול להיות לכל הפחות 1 (אם הקלף הראשון הוא לב) ולכל היותר 40 (אם כל 13 הלבבות נמצאים בסוף החפיסה). כמובן שיכול להתקבל כל מספר שלם בין 1 ל 40.
כעת, נחשב את ההסתברות ש $X=k$, עבור $1 \leq k \leq 40$. הביטוי שנקבל יהיה פונקציה של k ־ זאת תהיה פונקצית ההסתברות של X.
ראשית נמקם לב **ספציפי** שמופיע במקום ה k (13 אפשרויות לבחירה). שאר 12 הלבבות מופיעים ב $52-k$ המקומות האחרונים ($\binom{52-k}{12}$ מקומות לבחירה, ו$12!$ סידורים פנימיים). את יתר $52-13=39$ הקלפים נסדר בשאר המקומות ($39!$ סידורים). גודל מרחב המדגם הוא כמובן $52!$. קיבלנו:

$$P(X=k) = \frac{13 \times 12! \times \binom{52-k}{12} \times 39!}{52!} = \frac{13! \times \binom{52-k}{12} \times 39!}{52!} = \frac{\binom{52-k}{12}}{\binom{52}{13}}$$

הביטוי שמצאנו נכון עבור $k \in \{1, ..., 40\}$, אחרת $P(X=k)=0$.
שימו לב שהשוויון האחרון מרמז שניתן היה לפתור את התרגיל בדרך פשוטה יותר: למעשה אין חשיבות למספרים שעל הקלפים, אלא רק לצורות. לפי הגישה הזו גודל מרחב המדגם הוא $\binom{52}{13}$ (בחירת מקומות ללבבות) וגודל המאורע $X=k$ הינו $\binom{52-k}{12}$ (יש לב במקום ה ־ k וצריך למקם את 12 הלבבות הנותרים ב ־ $52-k$ המקומות שאחרי הלב הנ"ל).

3. בכד עשרה כדורים, אחד לבן והשאר שחורים. בכל סיבוב מוציאים כדור, עד שיוצא כדור לבן. נסמן ב X את מספר הסיבוב שבו הסתיים הניסוי. כיצד מתפלג X כאשר:

(א) מוציאים ומחזירים.

(ב) מוציאים ולא מחזירים.

(ג) מוציאים ומחזירים, אבל ידוע שלא ביצענו יותר מ 20 ניסויים.

(ד) מוציאים ומחזירים, אבל מפסיקים לנסות אחרי 20 ניסויים.

פתרון:

(א) התפלגות גיאומטרית. בכל שלב הסיכוי להצלחה הוא $\frac{1}{10}$, ואז $X \sim G(\frac{1}{10})$.

(ב) נדמיין שהכדורים מסודרים בשורה, ומוציאים אותם מימין לשמאל. משיקולי סימטריה, הסיכוי שהכדור הלבן במקום ה i הוא שווה לכל i, ולכן שווה ל$\frac{1}{10}$. לכן מדובר בהתפלגות אחידה $U[1,10]$.
ניתן לקבל אינטואיציה לכך על ידי חישוב ישיר של ההסתברות עבור כמה מקרים :

$$P(X=1)=\frac{1}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

כעת ניתן להמשיך באינדוקציה. לא נעשה זאת אלא נסתפק בטיעון הסימטריה.

(ג) אפשר לנסח את השאלה כך: נגדיר את Y להיות מספר הנסיונות ללא כל התניה . אז $Y \sim G(\frac{1}{10})$ כפי שמצאנו בסעיף הראשון. בסעיף זה מבקשים מאיתנו למצוא את ההתפלגות של מ"מ X המקיים $X = Y \mid Y \leq 20$
עבור $k > 20$ ההסתברות $P\left(X=k\right)$ היא 0, ועבור $k \leq 20$ נחשב:

$$P\left(X=k\right)=(P(Y=k \mid Y\leq 20)=\frac{P(Y=k\cap Y\leq 20)}{P(Y\leq 20)}=\frac{P(Y=k)}{1-P(Y>20)}=\frac{(\frac{9}{10})^{k-1}\frac{1}{10}}{1-(\frac{9}{10})^{20}}$$

(ד) מדובר במשתנה גיאומטרי רגיל, רק שהערך 20 מקבל את ההסתברויות של כל הערכים שמעליו (משתנה כזה נקרא "מצונזר"):

$$P(X=k)=\begin{cases}(\frac{9}{10})^{k-1}\cdot\frac{1}{10} & 1\leq k<20\\ (\frac{9}{10})^{19} & k=20\\ 0 & k>20\end{cases}$$