הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ תרגול 4
משתנים מקריים בדידים

אימאן ג'לג'ולי ויותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

הגדרות :
יהי X מ"מ (משתנה מקרי $Random\,Variable$) .

- X הוא פונקציה ממרחב המדגם Ω לישר הממשי: $X:\Omega\mapsto\mathbb{R}$.
- אם קבוצת הערכים האפשריים ש X יכול לקבל היא בת מניה, אז נאמר ש X הוא מ"מ בדיד.

התפלגות ברנולי (אינדיקטור)
ראשית נגדיר **ניסוי ברנולי** כניסוי בעל שתי תוצאות אפשריות בלבד. לאחת מהן, שתיבחר באופן שרירותי, נקרא "הצלחה" ולאחרת "כשלון".
$X\sim Ber\left(p\right)$ מציין אם התקבלה הצלחה" בניסוי ברנולי בודד. פונקצית ההסתברות שלו ניתנת ע"י:

$$P\left(X=x\right)=\begin{cases} p & x=1\\ 1-p & x=0 \end{cases}$$

התפלגות בינומית
$X\sim Bin\left(n,\,p\right)$ הוא משתנה מקרי המציין את **מספר ההצלחות** בסידרה של n ניסויי ברנולי ב"ת, כאשר הסיכוי להצלחה הוא בכל ניסוי הוא p . משתנה זה הוא סכום של n מ"מ מתפלגים $Ber\left(p\right)$. (מקרה פרטי עבור $n=1$ הוא פשוט $Ber\left(p\right)$. כלומר $Bin\left(1\,,p\right)=Ber(p)$)
פונקציית ההסתברות שלו ניתנת ע"י:

$$P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}\quad k\in\left\{ 0,\,1\,,2,\,\ldots,\,n\right\}$$

התפלגות היפרגיאומטרית
$X\sim HG\left(n,\,a,\,b\right)$ סופר את מספר הפרטים "המיוחדים" שנבחרו במדגם בגודל n, מתוך אוכלוסיה שבה יש a פרטים "מיוחדים" ו b פרטים "לא מיוחדים" הדגימה נעשתה ללא החזרה. פונקציית ההסתברות שלו ניתנת ע"י:

$$P\left(X=k\right)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

התפלגות גיאומטרית

$X\sim Geom\left(p\right)$ - **סופר את ניסויי הברנולי** הב"ת שיש לבצע עד קבלת ההצלחה הראשונה. כלומר סדרת הנסיונות, שמראש איננה מוגבלת באורכה, נעצרתכאשר מקבלים הצלחה ראשונה.

$$P\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p\,,\,k\in\left\{ 1,2,3,\dots\right\}$$

התפלגות בינומית שלילית

$X\sim NB\left(r,p\right)$ **סופר את ניסויי הברנולי** הב"ת שיש לבצע עד לקבלת r הצלחות, כאשר הסיכוי להצלחה הוא בניסוי בודד הוא p. כלומר סדרת הנסיונות, שמראש איננה מוגבלת באורכה, נעצרת כאשר מקבלים r הצלחות.

$$P\left(X=n\right)=\binom{n-1}{r-1}p^{r}\left(1-p\right)^{n-r}\ ,\,n\in\left\{ r,r+1,r+2,\dots\right\}$$

התפלגות אחידה בדידה

$X\sim U[a,\,b]$

$$P\left(X=k\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} & a\leq k\leq b\\ 0 & otherwise \end{cases}$$

התפלגות פואסון

משמש בד"כ למדל את מספר האירועים שקורים בפרק זמן קבוע. למשל, מספר המכוניות שחולפות מתחת לגשר השלום בדקה. במקרה זה הפרמטר λ יציין עד כמה התנועה בכביש סואנת. מסמנים $X\sim Pois\left(\lambda\right)$, ופונקציית ההתפלגות ניתנת ע"י:

$$P\left(X=k\right)=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}\,,\,\Omega=\left\{ 0,1,2.\dots\right\}$$

1. בבריכה 5 דגי זהב ו - 15 קרפיונים. דייג דג 6 דגים ללא החזרה. יהי X מספר דגי הזהב שהדייג דג, Y מספר דגי הזהב שנשארו בבריכה.

   (א) כיצד מתפלג X?

   (ב) כיצד מתפלג Y?

   (ג) כיצד מתפלג $X+Y$?

   (ד) נניח שלאחר כל פעם שהדייג תופס דג, הוא משחרר אותו, איך מתפלג X?

2. מערבבים היטב חפיסת קלפים סטנדרטית, והופכים קלפים עד שמקבלים לב בפעם הראשונה. יהי X משתנה מקרי הסופר את הקלפים שהפכנו. כיצד מתפלג X?

3. בכד עשרה כדורים, אחד לבן והשאר שחורים. בכל סיבוב מוציאים כדור, עד שיוצא כדור לבן. נסמן ב X את מספר הסיבוב שבו הסתיים הניסוי. כיצד מתפלג X כאשר:

(א) מוציאים ומחזירים.

(ב) מוציאים ולא מחזירים.

(ג) מוציאים ומחזירים, אבל ידוע שלא ביצענו יותר מ 20 ניסויים.

(ד) מוציאים ומחזירים, אבל מפסיקים לנסות אחרי 20 ניסויים.