הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 3
עוד על הסתברות מותנה, הסתברות שלמה וכלל בייס

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין ־ מועד ב' ספטמבר 2006, שאלה 15:
נתונים שני כדים הממוספרים "1" ו־ "2". בכד "1" יש 5 כדורים לבנים ו־ 5 כדורים שחורים, ובכד "2" יש 3 כדורים שחורים ו ־ 3 כדורים לבנים. בוחרים באקראי כדור מכד "1" ומעבירים אותו לכד "2" (נקרא לו "הכדור המועבר"). כעת בוחרים באקראי כדור מכד "2" (נקרא לו "הכדור הזוכה").
בהינתן שצבעו של הכדור הזוכה הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור המועבר הוא לבן?
פתרון:
נגדיר את המאורעות הבאים:
A ־ הכדור המועבר לבן.
B ־ הכדור הזוכה לבן.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{7} + \left(1 - \frac{5}{10}\right) \cdot \frac{3}{7}} = \frac{4}{7}$$

2. שלדון רוס, פרק 3 עמ' 96.
בניסוי רב שלבי מטילים שוב ושוב זוג קוביות ומביטים **בסכום** התוצאות. מה ההסתברות לקבל 5 לפני שנקבל 7.
פתרון:
לכל n נגדיר E_n בתור המאורע "הסכומים 5 ו ־ 7 אינם מתקבלים ב $n-1$ הניסויים הראשונים, והסכום 5 מתקבל בניסוי ה n". זאת סידרה של מאורעות זרים. לכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(E_n\right)$$

ההסתברות לקבל סכום 5 בהטלה כלשהי היא $\frac{4}{36}$וההסתברות לקבל סכום 7 בהטלה כלשהי היא $\frac{6}{36}$. מכיון שהניסויים ב"ת זה בזה מקבלים:

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \frac{1}{9}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

ניתן לקבל פתרון זה בדרך נוספת (רקורסיבית). נסמן את ההסתברות של המאורע הרצוי ב p. אז מתקיים:

$$p = \frac{4}{36} \times 1 + \frac{26}{36} \times p + \frac{6}{36} \times 0$$

למעשה אנחנו מתנים בסכום הראשון שהתקבל: אם התקבל 5 - המאורע יקרה בוודאות (הסתברות 1), אם התקבל 7 - המאורע לא יקרה (הסתברות 0), אם התקבל כל סכום שאינו 5 או 7 - אז מכיוון שלניסוי הראשון אין השפעה על הניסוי השני (אי תלות) ההסתברות לקבל 5 נשארת זהה (p).

דרך נוספת: מתוך 36 התוצאות האפשריות, אנו מעוניינים רק ב 10 - 4 תוצאות הנותנות סכום 5 ו - 6 תוצאות הנותנות סכום 7. כל 10 התוצאות הן שוות הסתברות (ולמעשה כל התוצאות הן שוות הסתברות - מרחב מדגם סימטרי), לכן ההסתברות שאחת מתוך 4 התוצאות הנותנות סכום 5 תתקבל ראשונה (מבין 10 התוצאות האפשריות) היא $\frac{4}{10}$.

3. מתוך מבחן של ד"ר ערן שמעיה - מועד ב', מרץ 2015, שאלות 13, 15.
בכיתה 60 ילדים. בסוף השנה מחלקים שקיות עם סוכריות באופן הבא: מכינים שישים שקיות כאשר בשקית מספר k שמים kסוכריות. לאחר מכן עוברים על הילדים בסדר האלף בית ולכל ילד נותנים באופן אקראי אחת מהשקיות שנשארו בכד כאשר הגיע תורו. ילד שרואה שמישהו מקודמיו קיבל יותר סוכריות ממנו פורץ בבכי. תומס ג'פרסון הוא התלמיד העשירי בסדר האלף בית.

   (א) מה ההסתברות שג'פרסון קיבל 45 סוכריות?

   (ב) מה ההסתברות שג'פרסון פורץ בבכי?

פתרון:

(א) אין חשיבות לסדר שבו הילדים מקבלים את השקית. לכל ילד סיכוי זהה לקבל 45 סוכריות. אפשר לחשוב על חלוקת השקיות לילדים באופן הבא: מגרילים פרמטוציה כלשהי של המספרים $1, \ldots, 60$ואת המספר הראשון נותנים לילד ששמו הוא הראשון בסדר האלפבית, את המספר השני לילד השני וכו'... ההסתברות היא אם כך: $\frac{1}{60}$

(ב) השאלה האם ג'פרסון פורץ בבכי תלוייה רק בכמות הסוכריות אותן קיבלו עשרת הילדים הראשונים (ג'פרסון והתשעה שקדמו לו). כפי שהשתכנענו בסעיף הקודם, לכל ילד הסתברות שווה לקבל כל כמות של סוכריות - יש סימטריה בין הילדים. לכן לכל אחד מעשרת הילדים הראשונים יש הסתברות זהה להיות הילד שמקבל הכי הרבה סוכריות (מבין העשרה) - $\frac{1}{10}$. בפרט לג'פרסון יש הסתברות $\frac{1}{10}$להיות הילד שמקבל הכי הרבה סוכריות מבין העשרה. בכל מקרה אחר הוא יפרוץ בבכי - כלומר בהסתברות $\frac{9}{10}$.

4. שלדון רוס, פרק 3 עמ' 78
מחלקים באקראי חפיסת קלפים (52 קלפים) ל - 4 ערמות בנות 13 קלפים כל אחת. מהי ההסתברות שבכל ערמה יש בדיוק אס אחד?
פתרון:
נגדיר את המאורעות הבאים:
E_1: אס $\spadesuit$ נמצא באחת הערמות.
E_2: אסים $\heartsuit, \spadesuit$ נמצאים בערימות שונות
E_3: אסים $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$ נמצאים בערימות שונות
E_4: כל 4 האסים נמצאים בערימות שונות

המאורע שאנו מעוניינים בו הוא $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$. נשתמש בכלל השרשרת:

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) = P\left(E_1\right) \cdot P\left(E_2 \mid E_1\right) \cdot P\left(E_3 \mid E_2 \cap E_1\right) \cdot P\left(E_4 \mid E_3 \cap E_2 \cap E_1\right)$$

נחשב את ההסתברויות באגף ימין:
$P\left(E_1\right) = 1$
$P\left(E_2 \mid E_1\right) = \frac{39}{51}$
הסבר: הערמה המכילה את $A\spadesuit$ מכילה בנוסף 12 קלפים אחרים הנבחרים מתוך 51 הקלפים שנותרו (לאחר שכבר "הוצאנו" את $A\spadesuit$). לכן שאר הערמות יורכבו מ־ 39 קלפים הנבחרים מתוך 51 קלפים. כדי ש $A\heartsuit$ יהיה בערמה **שונה** מזו של $A\spadesuit$ הוא צריך להיבחר מתוך 39 הקלפים האלה.
$P\left(E_3 \mid E_2 \cap E_1\right) = \frac{26}{50}$ וגם $P\left(E_4 \mid E_3 \cap E_2 \cap E_1\right) = \frac{13}{49}$ משיקולים דומים.
נציב ונקבל:

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\right) = 1 \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 10.5\%$$