הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 2
הסתברות מותנה, כלל בייס, מאורעות בלתי תלויים והסתברות שלמה

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

הסתברות מותנית: אם $\mathrm{P(B)}>0$ אז "ההסתברות של A בהניתן B" ניתנת על ידי:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אי תלות של מאורעות: שני מאורעות A ו־ B נקראים בלתי תלויים (ב"ת) אם מתקיים

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

כלל השרשרת:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid A \cap B) \cdot P(D \mid A \cap B \cap C)$$

הסתברות שלמה: תהי $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ קבוצת מאורעות **זרים** במרחב המדגם Ω כך ש $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ אז לכל מאורע B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$$

כלל בייס:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

שאלות

1. בכד שתי קוביות: A קובייה הוגנת ו B המראה 6 בהסתברות 0.5 ואת הספרות $1,2,3$ בהסתברות שווה.

(א) שולפים קוביה מהכד ומטילים אותה. מה ההסתברות לקבל 6?

(ב) קיבלנו 6. מה ההסתברות ששלפנו הקוביה ההוגנת?

פתרון:

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה כדי לענות על הסעיף הראשון:

$$P(6) = P(6 \mid A)P(A) + P(6 \mid B)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

כעת נשתמש בכלל בייס כדי לענות על הסעיף השני:

$$P(A \mid 6) = \frac{P(6 \mid A)P(A)}{P(6)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

2. לגבי שופט מסויים ידועים הנתונים הבאים:

(א) הסיכוי שאדם העומד לדין ימצא אשם הוא 0.6

(ב) הסיכוי ש"עבריין" (A) ימצא "אשם" (G) הוא 0.8

(ג) הסיכוי ש"חף מפשע" (A^c) ימצא "זכאי" (G^c) הוא 0.9

הגיע אדם למשפט.

(א) מה הסיכוי שהוא עבריין?

(ב) מה הסיכוי שאדם שנמצא אשם יהיה חף מפשע?

(ג) מה הסיכוי שהשופט טועה בפסיקה?

פתרון:

(א) נסמן את ההסתברות שאדם הוא עבריין ב p ונצייר עץ או בעזרת נוסחאת ההסתברות השלמה:

$$P(G) = P(G \mid A)P(A) + P(G \mid A^c)P(A^c) = 0.8p + 0.1(1-p) = 0.6$$

נבודד את p ונקבל $P(A) = p = \frac{5}{7}$.

(ב)

$$P(A^c \mid G) = \frac{P(A^c)P(G \mid A^c)}{P(G)} = \frac{(1-\frac{5}{7}) \times 0.1}{0.6} = \frac{1}{21}$$

(ג)

$$P(G \cap A^c) + P(G^c \cap A) = P(G \mid A^c)P(A^c) + P(G^c \mid A)P(A) =$$

$$0.1 \times \frac{2}{7} + 0.2 \times \frac{5}{7} = \frac{6}{35}$$

3. בכד שני מטבעות - אחד הוגן ואחד מקבל "עץ" בהסתברות 0.7. מוציאים מטבע מהכד באקראי, ומטילים אותו פעמיים. נגדיר את המאורעות:
A- התקבל "עץ" בהטלה הראשונה.
B- התקבל "עץ בהטלה השניה.
האם המאורעות בלתי תלויים?
פתרון:
המאורעות תלויים. נחשב:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0.7 = 0.6$$

לכן

$$P(A)P(B) = 0.36.$$

מצד שני:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B \mid \text{coin } 1)P(\text{coin } 1) + P(A \cap B \mid \text{coin } 2)P(\text{coin } 2) =$$

$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times (0.7 \times 0.7) = 0.37.$$

אינטואיטיבית, המאורעות תלויים בגלל שאם מקבלים "עץ" בהטלה הראשונה, יותר סביר ששלפנו את המטבע המזוייף, ולכן יש סיכוי גבוה יותר לקבל "עץ" בהטלה הבאה.

4. הוכיחו או הפריכו: אם A, B מאורעות בלתי תלויים בעלי הסתברויות חיוביות, אז הם אינם זרים.
פתרון:
נתון שהמאורעות בעלי הסתברויות חיוביות, לכן $P(A)P(B) > 0$, בנוסף נתון שהם בלתי תלויים, לכן $P(A)P(B) = P(A \cap B)$. מסקנה - ההסתברות של החיתוך גדולה מ 0 ולכן הוא איננו ריק, כלומר המאורעות אינם זרים.
לסיכום: מאורעות ב"ת בעלי הסתברות חיובית אינם זרים. טענה שקולה: מאורעות זרים בעלי הסתברות חיובית הם מאורעות תלויים.

5. בשעשועון טלוויזיה משחקים משחק דו שלבי. המתמודדת עומדת מול 3 וילונות: וילון אחד מסתיר מכונית חדשה ושני הוליונות האחרים מסתירים דחליל. המתמודדת מתבקשת לבחור וילון (שלב א'). מנחת השעשועון יודעת מהו הוילון שמאחוריו מוסתרת המכונית. לאחר שהמתמודדת מכריזה על בחירתה, מסיטה המנחה את אחד הוילונות **שלא נבחרו** וחושפת דחליל (היא תמיד תבחר להסיט וילון שמאחוריו מסתתר דחליל). כעת מציעה המנחה למתמודדת לשנות את בחירתה כאשר נותרו רק שני וילונות אפשריים (שלב ב'). מהי האסטרטגיה הנכונה מצד המתמודדת?

(א) מצאו את ההסתברות לזכות במכונית אם המתמודדת **אינה משנה** את בחירתה בשלב ב'.
(ב) מצאו את ההסתברות לזכות במכונית אם המתמודדת **משנה** את בחירתה בשלב ב'.

פתרון:

(א) במקרה כזה שלב ב' אינו משפיע על המשחק וההסתברות לזכות במכונית היא $\frac{1}{3}$.

(ב) A - בחרנו במכונית בשלב א'
B - בחרנו במכונית בשלב ב'

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

כלומר האסטרטגיה הנכונה היא לשנות את הבחירה!