

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי - תרגול 2

הסתברות מותנה, כלל בייס, מאורעות בלתי תלויים והסתברות שלמה

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

הסתברות מותנית: אם $P(B) > 0$ אז "ההסתברות של A בהינתן B " ניתנת על ידי:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

אי תלות של מאורעות: שני מאורעות A ו- B נקראים בלתי תלויים (ב"ת) אם מתקיים

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

כלל השרשרת:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B | A) \cdot P(C | A \cap B) \cdot P(D | A \cap B \cap C)$$

הסתברות שלמה: תהי $\{A_i\}_{i=1}^n$ קבוצת מאורעות זרים במרחב המדגם Ω כך ש $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ אז לכל מאורע B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$$

כלל בייס:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

שאלות

1. בכד שתי קוביות: A קובייה הוגנת ו B המראה 6 בהסתברות 0.5 ואת הספרות 1, 2, 3 בהסתברות שווה.

- (א) שולפים קוביה מהכד ומטילים אותה. מה ההסתברות לקבל 6?
(ב) קיבלנו 6. מה ההסתברות ששלפנו הקוביה ההוגנת?

2. לגבי שופט מסויים ידועים הנתונים הבאים:

- (א) הסיכוי שאדם העומד לדין ימצא אשם הוא 0.6
(ב) הסיכוי ש"עברייך" (A) ימצא "אשם" (G) הוא 0.8
(ג) הסיכוי ש"חף מפשע" (A^c) ימצא "זכאי" (G^c) הוא 0.9

הגיע אדם למשפט.

- (א) מה הסיכוי שהוא עברייך?
(ב) מה הסיכוי שאדם שנמצא אשם יהיה חף מפשע?
(ג) מה הסיכוי שהשופט טועה בפסיקה?
3. בכד שני מטבעות - אחד הוגן ואחד מקבל "עץ" בהסתברות 0.7. מוציאים מטבע מהכד באקראי, ומטילים אותו פעמיים. נגדיר את המאורעות:
A - התקבל "עץ" בהטלה הראשונה.
B - התקבל "עץ" בהטלה השניה.
האם המאורעות בלתי תלויים?

4. הוכיחו או הפריכו: אם A, B מאורעות בלתי תלויים בעלי הסתברויות חיוביות, אז הם אינם זרים.

5. בשעשועון טלוויזיה משחקים משחק דו שלבי. המתמודדת עומדת מול 3 וילונות: וילון אחד מסתיר מכונית חדשה ושני הוילונות האחרים מסתירים דחליל. המתמודדת מתבקשת לבחור וילון (שלב א'). מנחת השעשועון יודעת מהו הוילון שמאחוריו מוסתרת המכונית. לאחר שהמתמודדת מכריזה על בחירתה, מסיטה המנחה את אחד הוילונות **שלא נבחרו** וחושפת דחליל (היא תמיד תבחר להסיט וילון שמאחוריו מסתתר דחליל). כעת מציעה המנחה למתמודדת לשנות את בחירתה כאשר נותרו רק שני וילונות אפשריים (שלב ב'). מהי האסטרטגיה הנכונה מצד המתמודדת?

- (א) מצאו את ההסתברות לזכות במכונית אם המתמודדת **אינה משנה** את בחירתה בשלב ב'.
(ב) מצאו את ההסתברות לזכות במכונית אם המתמודדת **משנה** את בחירתה בשלב ב'.