הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 1

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

קומבינטוריקה

1. מחלקים $n+1$ כדורים **שונים** ל n תאים **שונים**. בכמה מהאפשרויות כל התאים מלאים?
פתרון:
אם כל התאים מלאים אז בהכרח יש תא שיש בו זוג כדורים. לכן נבחר זוג כדורים. נותרנו עם n אובייקטים ($n-1$כדורים בודדים וזוג כדורים אחד), שאותם יש לסדר בשורה. נקבל אם כך $\binom{n+1}{2}\times n!$ אפשרויות.

2. בחפיסת קלפים סטנדרטית 52 קלפים: 4 צורות (לב, עלה, יהלום ותלתן) ו 13 קלפים מכל צורה הממוספרים מ1 עד 13.
בוחרים 5 קלפים. כמה אפשרויות שונות מורכבות מזוג מאותו מספר ושלישיה מאותו מספר ("פול־האוס")?
פתרון:
נבחר מספר עבור הזוג (13 אפשרויות) ומספר עבור השלישיה (12 אפשרויות, משום שאפשרות אחת תפוסה על ידי הזוג). כעת נבחר את הצורות של קלפי הזוג ־ $\binom{4}{2}$ אפשרויות ואת הצורות של השלישיה ־ $\binom{4}{3}$ אפשרויות. סך הכל קיבלנו $12\times 13\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{3}=3,744$אפשרויות.

מרחבי הסתברות סימטרים

במרחב הסתברות סימטרי מספר סופי של מאורעות אפשריים אשר לכל אחד מהם מייחסים הסתברות זהה. נסמן את קבוצת כל המאורעות האפשריים ב Ω. מכאן שההסתברות של כל אחד מהמאורעות היא $\frac{1}{|\Omega|}$. תהי A תת קבוצה של Ω אז $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

1. בתנאי השאלה הקודמת, מה **ההסתברות** ל"פול האוס"?
פתרון:
יהי A המאורע שבו מקבלים "פול האוס". כבר חישבנו את $|A|=3,744$. כל שנותר הוא לחשב את $|\Omega|$. במקרה שלנו כל קומבינציה של חמישה קלפים **שונים** אפשרית (משום שזו הוצאה ללא החזרה) . לכן, $|\Omega|=\binom{52}{5}=2,598,960$. מכאן:

$$P(A)=\frac{3,744}{2,598,960}=0.001440$$

2. בוחרים באקראי 8 משבצות על לוח שחמט וממקמים עליהן צריחים.

   (א) מהי ההסתברות שאין אף צריח המאויים על יד צריח אחר?
   פתרון:

ראשית נספור כמה סידורים כאלה יש: את הצריח הראשון ניתן למקם בכל מקום על פני הלוח (8×8 אפשרויות). את הצריח השני יש למקם כך שהצריח הראשון לא מאיים עליו, כלומר לא ניתן לבחור משבצת שחולקת את אותה שורה (מספר) או עמודה (אות) עם הצריח הראשון, לכן נשארו 7×7 אפשרויות. עבור השלישי יש 6×6 אפשרויות וכן הלאה. בנוסף, נשים לב שאין חשיבות לסדר של הצריחים כלומר יש לחלק ב $8!$ (המשמעות היא שעבור כל סידור אפשרי, ניתן למשל להחליף בין שני צריחים ועדיין נקבל את אותו סידור בדיוק. איננו מבדילים בין הצריחים).
גודל מרחב המדגם הוא $\binom{64}{8}$ ולכן ההסתברות היא:

$$\frac{8^2 \times 7^2 \times ... \times 1^2}{\binom{64}{8} 8!} \approx 0.000009$$

דרך נוספת לחישוב מספר המאורעות שבהם אין אין צריח מאויים: מיקום של כל צריח מאופיין על ידי אות $(A-H)$ שמציינת עמודה ומספר $(1-8)$ שמציין שורה. על מנת שאף צריח לא יאיים על אף צריח אחר, צריך להיות צריח אחד בדיוק בכל עמודה וצריח אחד בדיוק בכל שורה. ניתן אם כן לחשוב על כל סידור "חוקי" כסידור של 8 הספרות בשורה, כך שהראשונה מקבלת את עמודה A, השניה מקבלת את עמודה B וכו'. כעת ברור שיש $8!$ סידורים אפשריים שבהם אין אף צריח לא מאויים.

(ב) מה ההסתברות שבחצי הלוח העליון יש 4 צריחים בדיוק?

פתרון:

המשמעות היא שיש גם ארבעה צריחים בחצי התחתון. גודל המאורע אם כן הוא $\binom{32}{4}\binom{32}{4}$ - בוחרים ארבעה מקומות בחצי לוח העליון, וארבעה מקומות בחצי הלוח התחתון. חשוב לשים לב כי הפעם אין צורך לחלק בסידורים פנימיים. הסיבה לכך היא שלא בחרנו מקומות עבור צריחים ספציפיים כמו בדוגמה הקודמת אלא בחרנו "רביעיות". נקבל כי ההסתברות היא:

$$\frac{\binom{32}{4}\binom{32}{4}}{\binom{64}{8}} = 0.2921$$

עקרון ההכלה וההפרדה

1. נבחר באקראי מספר שלם בין 1 ל1000. מה הסיכוי שהוא לא מתחלק ב 2, לא מתחלק ב 3, לא מתחלק ב 5 וגם לא ב 7?

פתרון:

נסמן בA_i את המאורע "המספר מתחלק ב i". אנחנו רוצים לחשב:

$$P(A_2^c \cap A_3^c \cap A_5^c \cap A_7^c) = P((A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)^c) = 1 - P(A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7) =$$

$$= 1 - \Big(P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_5) - ...(\text{all pairs})$$

$$+P(A_2 \cap A_3 \cap A_5) + ...(\text{all trios})... - P(A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7) \Big)$$

כאשר הגודל של המאורע A_i הוא $\frac{1000}{i}$ מעוגל כלפי מטה, ומתקיים $A_i \cap A_j = A_{i \times j}$. החישוב הסופי הוא:

$$\frac{1}{1000}\Big(1000-500-333-200-142+166+100+71+66+47+28-33-23-14-9+4\Big) = 0.228$$