הסתברות וסטטיסטיקה לדו־חוגי ־ פתרון תרגול 10
שונות ושונות משותפת

יותם חרובי

סמסטר א' תשע"ח

1. מתוך מבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' ינואר 2016
נתונים שני מקלות באורך 3. שוברים כל אחד מהמקלות בנקודה אחת הנבחרת לפי התפלגות אחידה רציפה לאורך המקל, ובאופן ב"ת בבחירת הנקודה במקל האחר. כך נוצרים שני שברים מכל מקל. נסמן:
X אורך שבר אחד של המקל הראשון (נבחר אקראית מבין שני השברים).
Y אורך השבר האחר של המקל הראשון.
Z אורך אחד השברים של המקל השני (נבחר אקראית מבין שני השברים).

(א) מצאו את $\mathbb{E}(XY)$.

(ב) מצאו את $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor)$.

(ג) מצאו את $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor)$.

(ד) מצאו את $Cov(X,X^2)$.

פתרון:

(א) ראשית נשים לב שמתקיים $Y=3-X$. לכן מבקשים מאיתנו לחשב $\mathbb{E}\left(X\left(3-X\right)\right)=\mathbb{E}\left(3X-X^2\right)$.
לכן:

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}\left(3X-X^2\right)=3\mathbb{E}X-\mathbb{E}X^2=3\mathbb{E}X-\left(Var(X)+(\mathbb{E}X)^2\right)$$

כאשר המעבר השני נובע מלינאריות התוחלת והמעבר האחרון מהנוסחא העיקרית לחישוב שונות. נעזר בכך שאנו יודעים למצוא את התוחלת והשונות של X:

$$\mathbb{E}(XY)=3\mathbb{E}X-\left(Var(X)+(\mathbb{E}X)^2\right)=3\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{3^2}{12}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\frac{3}{2}$$

(ב) פונקציית הערך השלם מעבירה אותנו מטיפול במ"מ רציף X לטיפול במ"מ אחיד $\lfloor X\rfloor$. $\lfloor X\rfloor$ יכול לקבל את הערכים 0, 1 או 2 וכך גם $\lfloor Y\rfloor$. נבדוק אילו זוגות $(\lfloor X\rfloor,\lfloor Y\rfloor)$ אפשריים (שימו לב שהערך שמקבל $\lfloor X\rfloor$ קובע באופן חד ערכי את הערך שמקבל $\lfloor Y\rfloor$:

$\lfloor X\rfloor$	$\lfloor Y\rfloor$	$\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor$
0	2	0
1	1	1
2	0	0

כלומר המשתנה $\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor$ הוא אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר X מקבל את הערך 1 - כלומר בהסתברות $\frac{1}{3}$. ולכן:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\lfloor X\rfloor=1}) = P(1 \leq X < 2) = \frac{1}{3}$$

(ג) בניגוד לסעיפים הקודמים בהם המשתנים היו תלויים (שני שברים של אותו מקל), כאן המשתנים הם ב"ת. העובדה ש X ב"ת ב - Z גוררת ש $\lfloor X\rfloor$ ב"ת ב - $\lfloor Z\rfloor$. משתנים ב"ת הם גם בלתי מתואמים (אבל לא להפך!). כלומר מתקיים:

$$Cov\left(\lfloor X\rfloor, \lfloor Z\rfloor\right) = \mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor) - \mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)\mathbb{E}(\lfloor Z\rfloor) = 0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor) = \mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)\mathbb{E}(\lfloor Z\rfloor) = \left(\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\right)^2$$

המעבר האחרון נובע מכך שמדובר במ"מ שווי התפלגות.
נותר למצוא את התוחלת של $\lfloor X\rfloor$. זאת משימה פשוטה משום ש $\lfloor X\rfloor$מתפלג אחיד **בדיד** בקטע $[0,2]$.
ולכן תוחלתו היא:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 1$$

נציב זאת ונקבל:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor) = 1^2 = 1$$

(ד) לפי הגדרת השונות המשותפת:

$$Cov(X, X^2) = \mathbb{E}\left(X\cdot X^2\right) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2$$

ראינו בסעיף הראשון ש $\mathbb{E}X = \frac{3}{2}$ וש - $\mathbb{E}X^2 = Var(X) + (\mathbb{E}X)^2 = 3$.
נותר לחשב את $\mathbb{E}X^3$. כלומר אנחנו מתבקשים לחשב תוחלת של מ"מ שהוא פונקציה של מ"מ אחר שהתפלגותו ידועה לנו - X. כלומר עלינו לחשב:

$$\mathbb{E}X^3 = \int_0^3 t^3\cdot f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^3 t^3\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{27}{4}$$

נציב זאת ונקבל:

$$Cov(X, X^2) = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2 = \frac{27}{4} - \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4}$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, פברואר 2007
X ו - Y הם מ"מ שווי התפלגות וידוע ש $X\sim U(0,1)$ (אחיד רציף). סמנו את התשובה הנכונה

(א) בהכרח $Var(X+Y) < \frac{1}{6}$.

(ב) בהכרח $Var(X+Y) \leq \frac{1}{6}$ אבל א' לא נכון.

(ג) בהכרח $Var(X+Y) > 0$.

(ד) בהכרח $Var(X+Y) > \frac{1}{12}$.

(ה) אף תשובה אינה נכונה.

פתרון:

השאלה לא מפרטת את מבנה התלות של המשתנים. כלומר לא ידוע אם הם תלויים ואם כן באיזה אופן.
לכן, כדי להפריך טענה, אנו חפשיים לבחור כל מבנה תלות שנרצה.
ראשית נחשב את השונות של המשתנים: $Var(x) = Var(Y) = \frac{1}{12}$.
בשלב השני נכתוב את הנוסחא לשונות הסכום:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 2Cov(X,Y) = \frac{1}{6} + 2Cov(X,Y)$$

אם אכן המשתנים ב"ת (למעשה מספיק בלתי מתואמים) אז שונות הסכום היא אכן $\frac{1}{6}$. עובדה זו מספיקה כדי לשלול את תשובה א'.
אם המשתנים מתואמים חיובית, כלומר $Cov(X,Y) > 0$ אז שונות הסכום גדולה מ - $\frac{1}{6}$. עובדה זו מספיקה כדי לשלול את ב'.
כעת, כדי לסתור את ג', צריך למצוא דוגמא שבה סכום המשתנים הוא משתנה מקרי מנוון (כלומר משתנה המקבל ערך בודד). אם נקח $Y = 1 - X$ עבור $X \sim U(0,1)$, אז סכום המשתנים מקבל ערך יחיד בהסתברות 1 וגם מתקיים ש - $Y \sim U(0,1)$.

החלק הראשון של הטענה טריוויאלי. נוכיח את החלק השני של הטענה:

$$\forall t \in (0,1): \; P(Y \leq t) = P(1 - X \leq t) = P(X \geq 1 - t) = 1 - P(X \leq 1 - t) = 1 - (1 - t) = t$$

וקיבלנו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ אחיד על $(0,1)$.
טענה זו סותרת את ג' ו - ד' ולכן תשובה ה' נכונה.

3. ממבחן של ד"ר אסף כהן, אוגוסט 2012
בכד 9 כדורים הממוספרים $1, 2, \ldots, 9$. עזרא מוציא כדורים בזה אחר זה ללא החזרה באקראי. יהי Y_i מ"מ מציין המקבל את הערך 1 אם בשלב i נבחר הכדור עם הספרה i.

(א) האם $\{Y_i\}_{i=1}^{9}$ הם שווי התפלגות? האם הם ב"ת?

(ב) מצאו את השונות של $Y_1 - Y_2$

פתרון:

(א) הם שווי התפלגות: $Y_i \sim Ber(1/9), \forall i$ והם **תלויים**. ניתן להראות תלות על ידי דוגמאות רבות, למשל:

$$P(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{1}{8} \neq P(Y_2 = 1) = \frac{1}{9}$$

(ב) ראשית נפרק את הביטוי לשונות ההפרש של שני מ"מ:

$$Var(Y_1 - Y_2) = Var(Y_1) + Var(Y_2) - 2 \cdot Cov(Y_1, Y_2)$$

מהסעיף הראשון ידועה לנו ההתפלגות של Y_i ולכן קל למצוא את שני המחוברים הראשונים:

$$Var(Y_1) = Var(Y_2) = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{81}$$

נחשב את השונות המשותפת:

$$Cov(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}(Y_1Y_2) - \mathbb{E}Y_1 \cdot \mathbb{E}Y_2 = P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) - (P(Y_1 = 1))^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{648}$$

וכעת השונות היא:

$$Var(Y_1 - Y_2) = 2 \cdot \frac{8}{81} - 2 \cdot \frac{1}{648} = \frac{7}{36}$$