<u>תהליך פואסון</u>

תהליך פואסון $\{X(t)\}$ סופר את מספר ההתרחשויות עד נקודות זמן שונות $t \geq 0$.
$X(t)$ סופר את מספר ההתרחשיות בקטע הזמן $[0,t]$.
לתהליך פואסון יש פרמטר יחיד $\lambda > 0$ ומצביו הם כל השלמים האי שליליים.
כתהליך שמונה התרחשויות, באופן טבעי $X(t)$ לא יכול לרדת עם התקדמות הזמן.
מתקיימות ההנחות הבאות:

<u>א</u>. $X(0) = 0$
(באופן טבעי מתחילים עם 0 התרחשויות בזמן 0).

<u>ב</u>. $P[X(t+h) = n \mid X(t) = n] = 1 - \lambda h + o(h)$
(כאשר $o(h)$ מסמן גודל המקיים שכאשר $h \to 0$, הוא שואף לאפס יותר מהר מכל ch עבור כל $c > 0$.
זאת אומרת שכאשר $h \to 0$, הסיכוי שתהיה התרחשות ושיחול שינוי ב X מתנהג כמו λh).

<u>ג</u>. $P[X(t+h) = n+1 \mid X(t) = n] = \lambda h + o(h)$

<u>ד</u>. $P[X(t+h) > n+1 \mid X(t) = n] = o(h)$
(זאת אומרת שבפרק זמן $h \to 0$, ההסתברות שיהיו יותר מהתרחשות אחת שואפת לאפס יותר מהר מכל פונקציה לינארית של h).

<u>ה</u>. עבור כל סדרת זמנים $t_1 < s_1 \leq t_2 < s_2 \cdots \leq t_n < s_n$ המשתנים המקריים $\{X(s_i - t_i)\}$ הם ב"ת
(זאת אומרת שיש אי תלות בין גדלי הקפיצות של התהליך בפרקי זמן זרים).

<u>משפט</u>
אם $\{X(t)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אז התפלגות $X(t)$ היא פואסונית עם פרמטר λt. כלומר:
$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ עבור כל $k = 0,1,2,\cdots$.

<u>הוכחה</u>
נחלק את הרווח $[0,t]$ ל n רווחים שווים. הקטע ה- i יהיה $\left[\frac{i-1}{n}t, \frac{it}{n}\right)$ עבור $i = 1,\cdots,n$.
נראה שכאשר $n \to \infty$, ההסתברות שיהיה קטע שבו יהיה יותר מהתרחשות אחת באיזשהו קטע, שואפת לאפס.
יהיו E_i המאורעות שבקטע ה- i יהיה יותר מהתרחשות אחת.
יהי $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (זהו המאורע שלפחות בקטע אחד תהיה יותר מהתרחשות אחת).
הסתברות איחוד אף פעם לא גדולה מסכום ההסתברויות ולכן נקבל:

$$P(E) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} o\left(\frac{t}{n}\right) = no\left(\frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כעת בהנחה שבאף קטע חלקי של הקטע $[0,t]$ לא יתרחשו יותר מאירוע אחד, נחשב את ההסתברות שבקטע $[0,t]$ יתרחשו k התרחשויות, זאת אומרת שבבדיוק k קטעים תתרחש התרחשות אחת.

$$\binom{n}{k}\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k}\left(1-\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k}=$$

$$=\left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)\left(\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{k}+o\left(\frac{1}{n^{k}}\right)\right)\left(\frac{\left(1-\lambda\frac{t}{n}-o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n}}{\left(1-\lambda\frac{t}{n}-o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k}}\right)$$

$$\rightarrow\frac{(\lambda t)^{k}}{k!}e^{-\lambda t}$$

הסברים:

בפיתוח בינומיאלי של $\left(\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k}$ המחובר הראשון הוא $\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{k}$ וביתר k המחוברים האחרים $\frac{1}{n}$ מופיע בחזקה גבוהה מ k.

כאשר k הוא קבוע מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k}}=1$ ו $\lim_{n\to\infty}\left(1-\lambda\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k}=1$.

לאחר שהוכחנו שמספר האירועים עד זמן t מתפלג פואסונית, נוכל לשים לב לכך שאם τ_1 הוא זמן ההתרחשות הראשונה, אז $P[\tau_1>t]=P[X(t)=0]=e^{-\lambda t}$, כלומר τ_1 הוא משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר λ. זה מקרב אותנו לבניה של תהליך פואסון.

<u>בניית תהליך פואסון</u>

נספור את מספר ההתרחשויות החל מזמן 0 ועד נקודות הזמן השונות t, לאחר כל התרחשות ממתינים זמן המתפלג $\exp(\lambda)$ עד ההתרחשות הבאה. המשתנים המייצגים את משך הזמן בין התרחשות להתרחשות הם ב"ת.

נבדוק שמתקיימות כל חמשת ההנחות של תהליך פואסון:

<u>א</u>. עד זמן 0 אין אף התרחשות.

<u>ב</u>. לגבי משתנה $Y\sim\exp(\lambda)$ מתקיימת תכונת חוסר הזכרון:

$$P[Y>t+r\mid Y>t]=P[Y>r]=e^{-\lambda r}$$

לכן נקבל כאן $P[X(t+h)=n\mid X(t)=n]=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h)$

(המעבר האחרון יכול להתקבל לפי פיתוח טיילור).

<u>ד</u>. כדי שבקטע באורך h יתרחשו לפחות שני אירועים, צריך שקודם כל יתרחש אירוע אחד לפחות. לכך יש הסתברות $1-e^{-\lambda h}$. אם מתרחש אירוע, אז הוא מתקיים בנקודה בין 0 ל h. לאחר התרחשות זו, צריך התרחשות נוספת במה שנותר מהקטע שהוא באורך של לא יותר מ h. לכן נקבל

$$P[X(t+h)>n+1\mid X(t)=n]\le\left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(1-e^{-\lambda h}\right)=(\lambda h+o(h))^{2}=o(h)$$

<u>ג</u>. מתקיים $P[X(t+h)\ge n+1\mid X(t)=n]=1-e^{-\lambda h}=\lambda h+o(h)$

בצירוף עם התוצאה של ד' נקבל $P[X(t+h)=n+1\mid X(t)=n]=\lambda h+o(h)$

(ההסתברות ללפחות אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$ וההסתברות ליותר מאירוע אחד היא $o(h)$, לכן ההסתברות לבדיוק אירוע אחד היא $\lambda h+o(h)$).

<u>ה</u>. התכונה נובעת מחוסר זכרון של התפלגות מעריכית.