

עיקרון ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \mp \dots$$

האיברים ממרחב המדגם שנכללים ב $\bigcup_{i=1}^n A_i$ הם האיברים שכלולים בלפחות אחת מהקבוצות

A_i . כל איבר כזה צריך להימנות בדיוק פעם אחת באגף ימין.

נניח שאיבר שייך ל m מהקבוצות A_i , נרצה להראות שהוא ימנה בדיוק פעם אחת עבור כל m נתון. הוא מוכל בחיתוך של כל m הקבוצות האלה וגם בחיתוך של כל k תת קבוצות של

הקבוצה הזאת בת m איברים. יש $\binom{m}{k}$ אוספים של תת קבוצות בגודל k של הקבוצה

בגודל m . כאשר באגף ימין עוברים על תתי הקבוצות בגודל k , אז האיבר הזה נמנה בכל החיתוכים של k קבוצות שכולן מוכלות ב m הקבוצות. עבור k אי זוגי, הוא נסכם עם סימן

+ ועבור k זוגי הוא נסכם עם סימן -. בשיעור קודם ראינו ש $\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} = 0$. האיבר

כלול בכל תת קבוצה של m הקבוצות, להוציא את הקבוצה הריקה. לכן הוא נספר

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} \text{ פעמים. אך}$$

$$\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+1} \right) - \binom{m}{0} (-1)^{0+1} = 0 - (-1) = 1$$