פתרונות לשאלות חזרה בקומבינטוריקה

שאלה 1

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35 \qquad \binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10 \qquad (8)_2=8\cdot 7=56$$

שאלה 2

אם הכדורים הם שונים אז יש $3^4=81$ אפשרויות.

שאלה 3

$$3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 3!$$

(יש לתת סידור פנימי לספרים מכל מקצוע ויש למצוא סדר בין המקצועות השונים.)

שאלה 4

מתקיים $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$. לכן $\binom{72}{6}=\binom{71}{5}+\binom{71}{6}$.

שאלה 5

א. $7!$

ב. סידור פנימי לדני ורמי ואחר-כך, כאשר מתייחסים אליהם כאל יחידה אחת, יש $7-1=6$ יחידות לסידור. לכן בסך הכל יש $2!\cdot 6!$ סידורים.

ג. יש לבחור את אחד משני הקצוות עבור דני ויש לסדר את 5 התלמידים שאינם דני ורמי בחמשת המקומות שאינם בקצה. לכן יש $2!\cdot 5!$ סידורים.

ד. יש לבחור את אחד מתוך ארבעת זוגות המקומות האפשריים לשניהם. יש לבחור להם את אחד מתוך שני הסידורים הפנימיים האפשריים. אחר-כך יש לסדר את חמשת האחרים בחמשת המקומות הנותרים ששניים מהם הם בין רמי ודני. לכן בסך הכל יש $4\cdot 2\cdot 5!$ סידורים אפשריים.
או הסבר אחר: יש לקבוע מי מהשניים ישב משמאל לאחר. יש לבחור מי השניים האחרים שישבו בינהם ויש לסדר את השניים האלה. זה קובע גוש של ארבעה תלמידים. בנוסף יש עוד שלושה תלמידים שלא ישבו בין דני ורמי. את השלושה האלה יש לסדר יחד עם הגוש שבקצוות שלו יושבים דני ורמי. לכן בסך הכל יש $2!\binom{7-2}{2}2!\cdot 4!$ או $2!\cdot(5)_2\cdot 4!$ סידורים.

שאלה 6

$$\binom{13}{4}\binom{13}{2}$$

שאלה 7

א. $(2N)^N$

ב. N^N כי לכל כדור יש N תאים אפשריים שאליהם הוא יכול להכנס.

ג. יש לסדר N כדורים שונים ב N תאים שונים כך שבכל תא מאלה יכנס כדור אחד. לכן יש $N!$ סידורים.

ד. יש לבחור N תאים שבהם יהיה כדור ולמקם בכל תא מאלה כדור שונה. לכן בסך הכל יש $\binom{2N}{N}N!$ אפשרויות או $(2N)_N$ אפשרויות. (מדגם סדור של תאים.)

שאלה 8

בדרך אלגברית:

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n+1}{k+1}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$

או בדרך אחרת: נראה ש $(n+1)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n+1}{k+1}$

נתונה קבוצה של $n+1$ אנשים. רוצים לבחור מהם ועד של $k+1$ אנשים שאחד מהם יהיה יושב ראש הועד. אגף שמאל: נבחר יושב ראש ומהנותרים נבחר עוד k אנשים. אגף ימין: נבחר ועד של $k+1$ אנשים ומהם נבחר יושב ראש.

שאלה 9

בשני האגפים סופרים את מספר הועדים בגודל כלשהו שכוללים יושב ראש ואולי עוד חברים נוספים.
אגף שמאל: מתוך n אנשים נבחר יושב ראש ולגבי כל אחד מהאחרים, נחליט אם הוא בועד.
אגף ימין: נבחר ועד בגודל של לפחות 1. מהועד הזה נבחר יושב ראש. אם נבחר ועד בגודל k , אז יש k אפשרויות לבחור יושב ראש.

שאלה 10

$$\binom{60}{3}-\binom{60-20}{3}$$

(ממספר האפשרויות לבחירת 3 גפרורים, אנו מחסירים את מספר האפשרויות לבחירת 3 גפרורים רק מהלא שרופים.)

פתרון אלטרנטיבי הוא: $\binom{20}{1}\binom{40}{2}+\binom{20}{2}\binom{40}{1}+\binom{20}{3}$.

שאלה 11

$$\binom{100}{60}$$

שלומי