

הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 13

שלומי

שאלה 1

א. עבור כל $n \geq 1$ מתקיים $P(X_n \leq n) \geq P(X_n = 1) = 0.5$.

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \leq n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 0.5 = \infty$ ומכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n \leq n)$.

מתקיים $P(X_n > n) = 0.5^n$. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n < \infty$ אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות $(X_n > n)$.

ב. עבור כל $n \geq 1$ מתקיים $P(X_n \leq n) \geq P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$.

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \leq n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ומכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n \leq n)$.

מתקיים $P(X_n > n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} > 0.1$. לכן קיים N כך שעבור כל $n > N$

מתקיים $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0.1$. מכיון שיש אין סוף איברים שגדולים מ 0.1 אז סכום הטור הוא אין סוף. מכיון שהמאורעות הם ב"ת, אז בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות $(X_n > n)$.

הערות

שימו לב שבמקרה זה בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות וגם אין סוף מאורעות שמשלימים להם.

למעשה עבור כל n טבעי מתקיים $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0.1$. אבל כאן במקום להוכיח את העובדה הזאת, עשינו שימוש בגבול של

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$