הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 11

שלומי

שאלה 1

למשתנה בעל התפלגות מעריכית עם פרמטר 0.1 יש תוחלת של 10 ושונות של 10^2.

החסם המתקבל לפי אי שיוויון צ'בישב הוא

$$P(X \geq 30) \leq P(|X-10| \geq 20) = \frac{V(X)}{20^2} = \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4}$$

הערה

שימו לב שאנו יכולים גם לחשב את ההסתברות המדויקת שהיא $P(X \geq 30) = e^{-30 \cdot 0.1} = e^{-3}$.

שאלה 2

א. מכיון שאין הנחה על השונות, אז לא ניתן להשתמש באי שיוויון צ'בישב.
לפי אי שיוויון מרקוב מתקיים

$$P(X \geq 2) \leq \frac{E(X)}{2} = \frac{1}{2}$$

ב. בדומה להוכחת אי שיוויון מרקוב, השיקול כאן הוא כמותי. לא יתכן שלמאורע $(X \geq 2)$ תהיה הסתברות גדולה מידי, מבלי שהתוחלת תהיה גדולה מידי. נשתמש בחסמים שכל ערך אי שלילי הוא לפחות 0 וכל ערך שגדול או שווה ל 2 הוא לפחות 2.

$$1 = E(X) \geq P(X=10)\cdot 10 + P(0 \leq X < 2)\cdot 0 + P(X \neq 10, X \geq 2)\cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad P(X \neq 10, X \geq 2) \leq 0.25 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = P(X=10) + P(X \geq 2, X \neq 10) \leq 0.25 + 0.05 = 0.3$$

שאלה 3

נסתכל על סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שהשתנה ה- n בסדרה הוא בעל צפיפות 0.5 בקטע שבין 0 ל 1, ובעל צפיפות $0.5n$ בקטע שבין $\left(2, 2+\frac{1}{n}\right)$. אלה הן פונקציות צפיפות לגיטימיות כי הן אי שליליות והאינטגרל עליהן לאורך כל הישר הוא 1.

סדרת המשתנים שואפת בהתפלגות למשתנה X שפונקצית ההסתברות המצטברת שלו היא

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0.5 & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

נשים לב שלגבי משתנה זה, פונקצית ההסתברות המצטברת שלו אינה רציפה בנקודה 2, לכ כדי שתהיה התכנסות בהתפלגות, לא נדרשת התכנסות של ההסתברויות המצטברות בנקודה זו.

נשים לב שעבור כל קבוע $x > 2$ נתון, קיים N טבעי כך שעבור כל $n > N$, כל המשתנים X_n מקבלים רק ערכים קטנים מ x . לכן עבור כל אלה, פונקצית ההסתברות המצטברת שלהם בנקודה x שווה ל 1.

עבור כל $x < 2$ לכל המשתנים שבסדרה וגם למשתנה X , יש אותה פונקית הסתברות מצטברת, ולכן בנקודות אלה בודאי יש התכנסות (סדרת קבועים בודאי מתכנסת לאותו קבוע).

המשתנה X אינו רציף כי פונקצית ההסתברות המצטברת שלו קופצת בנקודה 2. מצד שני הוא גם אינו בדיד, כי כל נקודה שבין 0 ל 1 יכולה להתקבל.
