

## הסתברות וסטטיסטיקה / פתרון תרגיל 10

שלומי

### שאלה 1

יהיו  $X_1, X_2, X_3$  שלושה משתנים אינדיקטורים. כל אחד מהם הוא אינדיקטור לכך שאדם מסוים נמצא בין גלן הודל לאוסבלדו ארדילס.

מספר האנשים שממוקמים בין גלן הודל לאוסבלדו ארדילס שווה ל  $X_1 + X_2 + X_3$ . מתקיים

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_2, X_3)$$

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \text{ כאשר לכל } i, j \text{ מתקיים}$$

לגבי כל אדם סיכוי להיות האמצעי מבין השלושה שכוללים אותו ואת גלן הודל ואוסבלדו ארדילס שווים לסיכויים של כל אחד מבין גלן הודל ואוסבלדו ארדילס להיות האמצעי מבין השלושה. לכן כל אחד משלושת האינדיקטורים

$$\text{מקבל את הערך } 1 \text{ בסיכוי } \frac{1}{3} \text{ (הוא מתרחש בסיכוי } \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3} \text{).}$$

$$\text{לכן מתקיים } E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{3} \text{ ו } V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

לגבי כל זוג אנשים מבין השלושה האחרים, ההסתברות ששניהם יהיו בין גלן הודל לאוסבלדו ארדילס הוא

$$E(X_1 X_2) = E(X_1 X_3) = E(X_2 X_3) = \frac{1}{6} \text{ לכן מתקיים } \frac{2! \cdot 2!}{4!} = \frac{1}{6}$$

### הערות

התוחלת של אינדיקטור או של מכפלת אינדיקטורים שווה להסתברות לקבלת הערך 1. הערך האחר היחיד שיכול להתקבל הוא 0, שלא תורם לתוחלת.

אם אדם מסוים נמצא בין גלן הודל לאוסבלדו ארדילס, אז גדל הסיכוי לגבי אדם אחר שהוא גם בין גלן הודל לאוסבלדו ארדילס. הסיבה היא שהימצאותו של אדם בין שני אחרים מגדילה את ההסתברות ששני האחרים רחוקים אחד מהשני- זה מסביר יותר טוב את זה שאדם נמצא ביניהם.

### שאלה 2

$$\begin{aligned} V(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) + \\ &+ 2Cov(X_1, X_2) + 2Cov(X_1, X_3) + 2Cov(X_1, X_3) \\ &- 2Cov(X_1, X_4) - 2Cov(X_2, X_4) - 2Cov(X_3, X_4) \end{aligned}$$

מכיון שלכל זוג משתנים יש אותה התפלגות משותפת, אז כל השונות המשותפות שוות. מכיון ש 3 מהן מופיעות בסימן פלוס ו 3 מהן בסימן מינוס, אז מתקיים כאן

$$V(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4)$$

בלי קשר למה ערכה של השונות המשותפת.

### שאלה 3

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{0+2}{2} \cdot \frac{0+2}{2} = 1$$

( בגלל שהמשתנים הם ב"ת, אז הם בלתי מתואמים ותוחלת המכפלה שווה למכפלת התוחלות ).

$$\begin{aligned} V(XY) &= E(XY)^2 - E^2(XY) = E(X^2Y^2) - E^2(X)E^2(Y) = \\ &= E^2(X^2) - 1 = (V(X) + E^2(X))^2 - 1 = \left(\frac{2^2}{12} + 1\right)^2 - 1 \end{aligned}$$

---

---