הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 8

שלומי

שאלה 1

סעיף א'

כדי ש Z יקבל את הערך z צריך שהמשתנה X יקבל ערך של לפחות z.

$$P(Z=z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(X=x)P(Z=z\mid X=x)=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$

$$=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{x!}{z!(x-z)!}p^z(1-p)^{x-z}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

בתוך ה $\sum$ יש פיתוח טיילור של $e^{\lambda(1-p)}$. לכן הביטוי כולו שווה ל $e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^z}{z!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^z}{z!}$.

כעת נתן הוכחה בדרך שניה שבה השלבים הראשונים זהים לאלה שבהוכחה הראשונה.

$$P(Z=z)=\sum_{x=z}^{\infty}P(X=x)P(Z=z\mid X=x)=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$

$$=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{x!}{z!(x-z)!}p^z(1-p)^{x-z}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

כעת נחלק ונכפיל בגודל $e^{-\lambda(1-p)}$ ונקבל $\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{e^{-\lambda(1-p)}z!}\sum_{y=0}^{\infty}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$.

כעת בתוך ה- $\sum$ יש סכום הסתברויות של משתנה $P(\lambda(1-p))$. מכיון שזהו משתנה מקרי, אז הסכום הוא 1 ונקבל ביטוי $\frac{(\lambda p)^z}{z!}e^{-\lambda p}$ (חלוקת $e^{-\lambda}$ ב $e^{-\lambda(1-p)}$ נותנת $e^{-\lambda p}$).

סעיף ב'

אם מגיעים לבנק x לקוחות, אז ההתפלגות המותנה של מספר הפונים לכספר היא $Bin(x,0.5)$ ולכן היא בעל תוחלת $0.5x$. התוחלת השלמה היא $E(0.5X)=0.5E(X)=0.5\cdot 8=4$.

לפי סעיף א' התפלגות מספר הפונים לכספר היא $P(8\cdot 0.5)$. התוחלת של משתנה פואסוני שווה לפרמטר שלו ולכן כאן היא שווה ל 4.

<u>שאלה 2</u>

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)xdx=\int_0^1 x^2dx+\int_5^7 0.25xdx=\frac{1}{3}x^3]_0^1+\frac{1}{8}x^2]_5^6=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\left(7^2-5^2\right)$$

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א'</u>

$$E(-1)^X=\sum_{k=0}^{100}P(X=k)(-1)^k=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}(-1)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}=\left(\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right)^{100}=\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

לאחר שלומדים על תוחלת של מכפלת משתנים ב"ת ניתן לתת גם <u>פתרון בדרך נוספת</u>:

$X=\sum_{i=1}^{100}X_i$, כאשר X_i הם אינדיקטורים בעל הסתברות $\frac{1}{3}$. מתקיים לכל $1\le i\le 100$:

$E\left((-1)^{X_i}\right)=P(X_i=1)(-1)^1+P(X_i=0)(-1)^0=\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

המשתנים X_i הם ב"ת ולכן המשתנים $(-1)^{X_i}$ הם בלתי תלויים ובלתי מתואמים ולכן תוחלת המכפלה שלהם שווה למכפלת התוחלות שלהם.

לכן מתקיים $E(-1)^X=E\left((-1)^{\sum_{i=1}^{100}X_i}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$.

<u>סעיף ב'</u>

אם X מקבל ערך זוגי אז $(-1)^X$ שווה ל 1. אם X מקבל ערך אי זוגי אז $(-1)^X$ שווה ל -1 .

אם a היא ההסתברות ש X מקבל ערך זוגי אז $1-a$ היא ההסתברות ש X מקבל ערך אי זוגי.

מתקיים $a\cdot 1+(1-a)(-1)=E(-1)^X=\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$. לכן מתקיים $2a-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$.

כך מתקיים $a=\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{2}$. קבלנו שהסיכוי קרוב מאוד לחצי, אבל לא שווה לחצי.
