

הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 7

שלומי

שאלה 1

$$E(X) = \sum P(X = x)x = 0.2 \cdot 0 + 0.3 \cdot 2 + 0.5 \cdot 4 \quad \text{א.}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + P(X \geq 4) + 0 + 0 + \dots = \quad \text{ב.}$$

$$= (0.3 + 0.5) + (0.3 + 0.5) + 0.5 + 0.5$$

$$E(X^3) = \sum P(X = x)x^3 = 0.2 \cdot 0^3 + 0.3 \cdot 2^3 + 0.5 \cdot 4^3 \quad \text{ג.}$$

שאלה 2

המאורע שזוג מסוים נתון הוא מיודד הוא אינדיקטור בעל הסתברות חצי. מספר הזוגות המיודדים הוא סכום של $\binom{30}{2}$

אינדיקטורים בעל הסתברות חצי. מכיון שתוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות, אז תוחלת סכום זה שווה לסכום

$$\text{התוחלות של האינדיקטורים שהיא } 0.5 \cdot \binom{30}{2}.$$

הערה

אין להניח שיש אי תלות בין זוגות שונים. לכן אין להניח שמספר הזוגות המיודדים מתפלג בינומית.

שאלה 3

א. הרצפים שמתחילים ומסתיימים במקומות 1 ו 10 הם הצלחה בסיכוי $\frac{1}{3}$.

$$\text{הרצפים האחרים הם הצלחה בסיכוי } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{לכן תוחלת מספר הרצפים המוצלחים היא } 2 \cdot \frac{1}{3} + 7 \cdot \frac{1}{9}$$

ב. אם תוצאת ה"פלי" מופיעה במקום הראשון, אז נקבל רצף ראשון במקום 3.

אם תוצאת ה"פלי" מופיעה במקום השני, אז נקבל רצף ראשון במקום 4.

בכל המקרים האחרים, נקבל רצף ראשון כבר במקום 2.

$$\text{לכן התוחלת היא } \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 4 + \frac{8}{10} \cdot 2$$

שאלה 4

חלק א'

למעשה אילה מכפילה את כל הטבעיים שבתחום חוץ מאחד מהם.
מספר האפסים שבהם מסתיימת מכפלת כל 100 הטבעיים שבין 1 ל 100 הוא 24:
אפס נוצר ע"י מכפלה של גורם 2 וגורם 5. יש בתחום 20 מספרים שמתחלקים ב 5, שמתוכם 4 מתחלקים פעמיים ב 5. יש הרבה יותר גורמי 2.

אם מוותרים על טבעי אחד אז בסיכוי בסיכוי $\frac{4}{100}$ מאבדים שני גורמי 5 ובסיכוי $\frac{16}{100}$ מאבדים גורם 5 אחד. מספר גורמי ה 2 נשאר בכל מקרה גדול יותר ולכן מספר האפסים ממשיך להיקבע ע"י מספר גורמי ה 5.

חלק ב'

נראה שההפרש הוא מספר חיובי קטן מאוד.

בשני המקרים של דגימה בלי החזרה או עם החזרה, כל מספר שנדגם הוא בסיכוי $\frac{4}{100}$ בעל שני גורמי 5 ובסיכוי $\frac{16}{100}$

בעל גורם 5 יחיד, לכן תוחלת מספר גורמי ה 5 היא זהה בשני המקרים.

במקרה של דגימה ללא החזרה, זו גם תוחלת מספר האפסים (כי מספר גורמי ה 2 הוא בכל מקרה גדול יותר).

במקרה של דגימה עם החזרה, יש סיכוי קטן מאוד שמספר גורמי ה 2 יהיה קטן יותר.

כל נדגם הוא זוגי בסיכוי חצי. יש הסתברות נמוכה מאוד שידגמו למשל פחות מ 25 זוגיים, שלא לדבר על כך שיש

זוגיים בעלי יותר מגורם 2 יחיד.

בשני המקרים של דגימה בלי החזרה או דגימה עם החזרה, תוחלות מספר גורמי ה 5 הן זהות ותוחלות מספר גורמי ה 2 הן זהות. אבל למינימום שלהם אין אותה תוחלת.
