הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 6

שלומי

שאלה 1

א. עבור כל ערך z שלם אי שלילי מתקיים

$$P(Z=z)=P(X+Y=z)=\sum_{x=0}^{z}P(X=x,Y=z-x)\overset{independent}{=}\sum_{x=0}^{z}P(X=x)P(Y=z-x)=$$

$$=\sum_{x=0}^{z}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}\sum_{x=0}^{z}\frac{z!}{x!(z-x)!}\lambda^x\mu^{z-x}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\lambda^x\mu^{z-x}\overset{bimom}{=}$$

$$\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}(\lambda+\mu)^z$$

ב. נראה שההתפלגות המותנה היא $Bin\left(z,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

$$P(X=x\mid Z=z)=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(Z=z)}\overset{independent}{=}\frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(Z=z)}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}}=\binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}$$

שאלה 2

לפי שאלה 1 סעיף א' אם ההתפלגות בכל פרק זמן היא פואסונית ויש אי תלות בין פרקי זמן שונים, אז בזמן שכולל את כל פרקי הזמן החלקיים לו, ההתפלגות היא גם פואסונית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים. הפרמטר שמאפיין קטע פרופורציונלי לאורך הקטע.

שאלה 3

ההסתברות שלא יתרחש אף אירוע עד זמן t שווה להסתברות שמשתנה $P(\lambda t)$ יקבל את הערך 0.

הסתברות זו שווה ל $e^{-\lambda t}$. לכן ההסתברות שהאירוע הראשון יתרחש עד זמן t שווה ל $1-e^{-\lambda t}$. זו פונקצית ההסתברות המצטברת של משתנה $\exp(\lambda)$. לכן הזמן עד האירוע הראשון מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .

<u>שאלה 4</u>

נשים לב שההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים X,Y,Z היא $U(0,1)$.

כמו כן נשים לב שהמשתנים T,Z הם בלתי תלויים.

כל אחד מהמאורעות שנתאר כאן הוא מלבן או איחוד מלבנים זרים בתוך הרבוע.

<u>א</u>. עבור $t<0$ מתקיים $P(T\le t)=0$.

עבור $0\le t\le 0.5$ מתקיים $P(T\le t)=P(0\le X\le t)+P(1-t\le X\le 1)=(t-0)+(1-(1-t))=2t$.

עבור $t>0.5$ מתקיים $P(T\le t)=1$.

נקבל ש $T\sim U(0,0.5)$.

<u>ב</u>. עבור $w<0$ מתקיים $P(W\le w)=0$.

עבור $0\le w\le 0.5$ מתקיים

$$P(W\le w)=1-P(T>w,Z>w)=1-P(T>w)P(Z>w)=1-(1-2w)(1-w)$$

(למעשה המאורע $(T>w,Z>w)$ מוגדר על-ידי מלבן שרוחבו $1-2w$ וגובהו $1-w$).

עבור $w>0.5$ מתקיים $P(W\le w)=1$.
