הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 5

שלומי

שאלה 1

עבור משתנה מקרי $X+1 \sim G(p)$ מתקיים עבור כל k טבעי ש $\frac{P(X+1=k+1)}{P(X+1=k)} = \frac{pq^k}{pq^{k-1}} = q$.

לעומת זאת עבור כל משתנה $Y \sim P(\lambda)$ מתקיים עבור k טבעי $\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{\lambda}{k+1}$.

אם נשאיף את k לאינסוף, אז עבור משתנה פואסוני היחס שואף לאפס בזמן שהיחס עבור כל משתנה גיאומטרי הוא קבוע חיובי. לכן לא יתכן שמשתנה X הוא פואסוני וגם $X+1$ הוא גיאומטרי.

שאלה 2

עבור כל משתנה מקרי מתקיים $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. מכיון שמתקיים $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \infty$, אז הגבול הוא 1.

שאלה 3

באופן כללי מתקיים $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. כאן מתקיים $\int_1^2 f_X(x)dx = 1$ ולכן מתקיים $\int_1^2 cx^2dx = 1$ ולכן מתקיים

$\frac{1}{3}cx^3\Big]_1^2 = 1$ ולכן מתקיים $\frac{1}{3}c(2^3-1^3) = 1$ ולכן מתקיים $c = \frac{3}{7}$.

עבור $X < 1$ מתקיים $F_X(x) = 0$. עבור $X > 2$ מתקיים $F_X(x) = 1$.

עבור $1 \le x \le 2$ מתקיים $F_X(x) = \int_1^x f_X(z)dz = \int_1^x \frac{3}{7}z^2dz = \frac{1}{7}z^3\Big]_1^x = \frac{1}{7}(x^3-1)$.

שימו לב שכצפוי פונקצית ההסתברות המצטברת רציפה בכל נקודה כולל הנקודות 1 ו 2.

שאלה 4

יהי $Y = |X-1|$

מתקיים עבור $y < 0$: $F_Y(y) = 0$

מתקיים עבור $0 \le y < 1$:

$$F_Y(y) = P(1-y \le X \le 1+y) = F_X(1+y) - F_X(1-y) = \left[1-e^{-(1+y)}\right] - \left[1-e^{-(1-y)}\right]$$

מתקיים עבור $1 \le y < \infty$: $F_Y(y) = P(0 \le X \le 1+y) = F_X(1+y) = 1-e^{-(1+y)}$.

<u>שאלה 5</u>

$Y \backslash X$	0	1	2	3	P_Y
1	$\frac{1}{2^3}$	0	0	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	0	$\frac{3}{4}$
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

למשל, כדי שיתקיים $(X=1, Y=2)$, צריך לבחור בדיוק כדור אחד שיכנס לתא הראשון.