

### הסתברות וסטטיסטיקה / פתרון תרגיל 3

שלומי

#### שאלה 1

א. הסיכוי הוא חצי.

אם ב 7 ההטלות הראשונות של גלן הודל, מספר תוצאות ה"עץ" גדול ממספר תוצאות ה"עץ" ב 7 ההטלות של הארי קיין, אז בודאי שב 8 ההטלות הראשונות של גלן הודל, מספר תוצאות ה"עץ" גדול ממספר תוצאות ה"עץ" של הארי קיין. אם ב 7 ההטלות הראשונות של גלן הודל, מספר תוצאות ה"עץ" קטן ממספר תוצאות ה"עץ" ב 7 ההטלות של הארי קיין, אז בודאי שמספרן ב 8 ההטלות הראשונות של גלן הודל, הוא לא יכול להיות גדול ממספרן ב 7 ההטלות הראשונות של הארי קיין. אם ב 7 ההטלות הראשונות של גלן הודל מספרן שווה למספרן אצל הארי קיין, אז הכל תלוי בהטלה השמינית, ולכן במקרה זה הסיכוי הוא חצי. מכיון שבמספר הטלות זהה, לכל אחד מהם יש סיכוי שווה לקבל יותר תוצאות "עץ" מאשר לאחר, אז הסיכוי כולו הוא חצי.

יהי  $B$  - המאורע שיש שיוויון האחר 7 הטלות של כל אחד מהם.

$$\text{לפי הסתברות שלמה, הסיכוי כולו הוא } P(B) \cdot 0.5 + \frac{1 - P(B)}{2} \cdot 1 + \frac{1 - P(B)}{2} \cdot 0 = 0.5$$

ב. אם למשל  $p = 0.01$ , אז הסיכוי שלגלן הודל יהיה לפחות "עץ" אחד אינו גדול מ  $8 \cdot 0.01 = 0.08$  (הסתברות איחוד אינה גדולה מסכום ההסתברויות). מכיון שכדי שלגלן הודל יהיו יותר תוצאות "עץ", הוא צריך לפחות תוצאת "עץ" אחת, אז ההסתברות המבוקשת אינה גדול מ  $0.08$ .

#### שאלה 2

יהי  $a$  - הסיכוי בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו "עץ".

יהי  $b$  - הסיכוי בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו "פלי".

$$\text{ההסתברות המבוקשת שווה ל } \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$$

מתקיים

$$a = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0$$

( בתוך שני צעדים, או שנופלת הכרעה או שבסיכוי  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$  חוזרים למצב שבו קבלנו "עץ"

ראשון ועדיין לא קבלנו שום רצף ).

באופן דומה מתקיים

$$b = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

## הערה

אפשר לחשב את  $a$  ואת  $b$  גם בדרך נוספת:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} b \\ b = \frac{1}{3} a + \frac{2}{3} \cdot 0 \end{cases}$$

( בצעד אחד- או שנופלת הכרעה או שעוברים למצב האחר ).

## הערה

שימו לב שההסתברות המבוקשת אינה שווה לסתברות שקבלנו רצף של שני "פלי" בהינתן שההכרעה נפלה בצעדים הראשונים. אם ההכרעה לא נפלה בשני הצעדים הראשונים, זה אומר שבשתי ההטלות הראשונות קבלנו שתי תוצאות שונות. זה אומר שמשיקולי סימטריה, ההטלה השנייה היא של "עץ" בסיכוי חצי, וזה משנה את הסיכויים בהמשך.

## שאלה 3

צריך ליחס בדיוק 3 נקודות ממרחב המדגם לערך 1. לכן יש  $\binom{6}{3} = 20$  דרכים.

## שאלה 4

לכל תייר, יש סיכוי של  $p = 0.03$  להיות ישראלי. צריך ש 100 פעמים יתרחשו מאורעות שההסתברות של כל אחד מהם היא  $1 - 0.03$ .

בחירה של קבוצה מתוך קבוצת התיירים אינה בחירה עם החזרה. כל תייר יכול להבחר רק פעם אחת לקבוצה. לכן, לאחר שכמה פעמים התקבלו תיירים שאינם ישראלים, הסיכוי שהבאים הם ישראלים משתנה. אבל לבעיה זו אין השפעה גדולה על התוצאה. אוכלוסית התיירים היא גדולה, ובחירה של מספר סופי לא גדול מביניהם, לא משפיעה במידה משמעותית על התוצאה.

יש בעיה אחרת שהיא כן משמעותית. הבעיה הזו היא שיש תלות בין היותם של תיירים שונים מאותה מדינה. תיירים שמאותה מדינה נוטים ללכת ביחד. נמחיש זאת על-ידי הקצנה של הנתונים: נניח שהתיירים הולכים בקבוצות של 100 איש, אז הסיכוי שקבוצה של 100 איש אינה של ישראלים היא  $1 - 0.03$  ולא בחזקת 100. גם אילו הם היו הולכים בזוגות, אז הסיכוי היה  $(1 - 0.03)^{50}$ .

שלומי