הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 2

שלומי

שאלה 1

א. $0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5^2 = \frac{3}{8}$

(אם הם זהים, אז בסיכוי חצי ואם הם אינם זהים, אז בסיכוי רבע).

ב. A - המאורע ששניהם בנים

B - המאורע שהם זהים

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

שאלה 2

א. הסיכוי הוא $\frac{1}{3}$.

אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 3 או של 6.
אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3 עם שארית 1, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 2 או של 5.
אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3 עם שארית 2, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 1 או של 4.

בכל אחד מהמקרים התנאי מתקיים בהסתברות $\frac{1}{3}$. לכן ההסתברות השלמה היא $\frac{1}{3}$.

a הוא הסיכוי שעד לפני ההטלה האחרונה הסכום הוא כפולה של 3.
b הוא הסיכוי שעד לפני ההטלה האחרונה הסכום הוא כפולה של 3 עם שארית 1.
c הוא הסיכוי שעד לפני ההטלה האחרונה הסכום הוא כפולה של 3 עם שארית 2.

הסיכוי שהסכום כולו הוא כפולה של 3 הוא $\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}(a+b+c) = \frac{1}{3}$.

ב. התשובה היא $\frac{5}{36}$.

אם בהטלה הראשונה מקבלים תוצאה של 1, אז ההטלה הראשונה היא גם ההטלה הלפני אחרונה. לכן במקרה זה ההטלה הלפני אחרונה אינה שווה ל 2.
אם בהטלה הלפני אחרונה מקבלים תוצאה שונה מ 1, אז יהיו עוד לפחות שתי הטלות,

ובהטלה הלפני אחרונה הסיכוי לקבל תוצאה של 2 היא $\frac{1}{6}$.

לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{6} \cdot 0 + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

שאלה 3

לא בהכרח. נפריך את הטענה בעזרת דוגמא נגדית.

נניח שכל אחד מהמאורעות A_i הוא שאני קבלתי תוצאת "עץ" בהטלה של מטבע הוגן. כאן כל המאורעות הם זהים. למעשה כל הטלה היא העתק של תוצאת ההטלה הראשונה. מתקיים עבור כל $1 \le i < \infty$ ש $P(A_i) = 0.5$.

כך $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5 = \infty$. אך בהסתברות חצי ההטלה הראשונה אינה של "עץ" וכך לא תתקבל אף תוצאת "עץ" ובודאי לא יתקבלו מספר אין סופי של תוצאות "עץ". ניתן להסתכל על סדרת המאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ הזאת כסדרת הטלות תלויות שבה כל אדם, במקום להטיל מטבע משלו, מסתכל על תוצאת ההטלה של האדם הראשון.

שאלה 4

נראה שעבור כל זוג צמתים, ההסתברות שאין ביניהם מסלול היא אפס. נראה זאת על-ידי זה שנראה שלמעשה אפילו הסתברות המאורע שאין ביניהם מסלול באורך 2, היא אפס.

מכיון שיש מספר בן מניה של זוגות של צמתים ומכיון שלאיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס, יש הסתברות אפס, אז ההסתברות שיש זוג צמתים שביניהם אין מסלול באורך 2 היא אפס.

עבור זוג צמתים נתון i, j קיים בינהם מסלול באורך 2 דרך צומת שלישי נתון k בסיכוי 0.25, ולא קיים ביניהם מסלול באורך 2 דרך אותו צומת בסיכוי 0.75. ההסתברות שבין זוג צמתים נתון i, j לא קיים מסלול באורך 2, קטנה מ 0.75^n לכל n טבעי ולכן שווה לאפס.

לאיחוד בן מניה של מאורעות זרים יש הסתברות ששווה לסכום ההסתברויות של המאורעות.

טענה זו נכונה גם עבור איחוד בן מניה של מאורעות $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ כלשהם (אפשר לעבור לסדרת מאורעות זרים שיש לה את אותה איחוד: $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימת $B_1 = A_1$ ולכל $i \ge 2$: $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} B_j$).

<u>הערה</u>

המאורע שיש זוג צמתים שאין ביניהם מסלול, הוא לא מאורע ריק, אבל ההסתברות שלו היא אפס. זה דומה לכך שההסתברות שמשתנה רציף יקבל ערך מסוים היא אפס, למרות שהמאורע הזה אינו קבוצה ריקה.

שלומי