הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 1

שלומי

שאלה 1

א. מספר הפונקציות מ A ל B הוא 8^5 (לכל איבר שבתחום צריך לבחור איבר מהטווח).

מספר הפונקציות החד חד ערכיות הוא $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=\binom{8}{5}5!$ (לכל איבר מהתחום צריך לבחור איבר שונה מהטווח). לכן ההסתברות היא $\frac{\binom{8}{5}5!}{8^5}$.

ב. אין פונקציה מ A על B. לכן המאורע שהפונקציה היא על, הוא קבוצה ריקה. לקבוצה ריקה יש הסתברות אפס.

שאלה 2

א. $\frac{4!\cdot2!}{7!}$ (אפשר רק להחליף בין אותם מכתבים שמיועדים לאותה אחת).

או לפי גישה אחרת:

$\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{7}{1}\binom{6}{2}}$ (כאן מרחב המדגם מייצג את הבחירות של מכתבים לרונית ולנעה, כאשר במאורע הן חייבות לקבל את המכתבים שלהן).

ב. רוב המכתבים מיועדים לאילה. לכן, היא בודאי תקבל לפחות מכתב אחד שמיועד לה.

לכן צריך רק לדאוג שרונית תקבל את המכתב שמיועד לה, ושנעה תקבל את שני המכתבים שמיועדים לה, או מכתב אחד שמיועד לה ומכתב אחד שמיועד לאילה.

נעבוד עם מרחב מדגם של בחירת המכתבים לרונית ולנעה.

ההסתברות היא

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}+\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}\binom{6}{2}}$$

שאלה 3

א. אם $n = 3$ אז יש בסך הכל 3 קשתות בגרף ולא יתכן שיותר ממאורע A_i בודד יתרחש. המאורעות הם זרים, ולכן הסתברות האיחוד שלהם שווה לסכום ההסתברויות שלהם.
(יש בסך הכל 3 קשתות ולכן לא יתכן שבכל אחד משני צבעים יהיו לפחותשתי קשתות).

ב. אם $n = 4$ אז יתכן שיתרחשו שני מאורעות. המאורעות אינם זרים, קיימים חיתוכים של מאורעות שיש להם הסתברות חויבית, ולכן הסתברות האיחוד אינה שווה לסכום ההסתברויות. בסכום ההסתברויות סוכמים גם חיתוכים בין מאורעות שונים.
(יש למשל הסתברות חיובית שמהצומת הכחול יצאו שתי קשתות כחולות וגם מהצומת הירוק יצאו שתי קשתות ירוקות לצמתים האדום והצהוב).

שאלה 4

לפי נוסחת ההכלה וההפרדה מתקיים

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

יהי A_i - המאורע שילד i יתאכזב.

$$P(A_1) = \frac{2^8}{3^8}$$

(הילד הראשון יתאכזב רק אם הוא לא יקבל אף חבילה, ועבור כל חבילה יבחר אחד משני הילדים האחרים).

$$P(A_2) = \frac{2^8 + 2^7}{3^8}$$

(הילד השני יתאכזב אם כל החבילות יחולקו בין שני האחרים או שהחבילה הראשונה תנתן לו ושבעת האחרות יחולקו בין שני האחרים).

$$P(A_3) = \frac{2^8 + 2^7 + 2^7}{3^8}$$

(הילד השלישי יתאכזב אם כל החבילות יחולקו בין שני האחרים או שהוא יקבל את החבילה הראשונה ושבעת האחרות יחולקו בין שני האחרים או שהוא יקבל את החבילה השניה ושבעת האחרות יחולקו בין שני האחרים).

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1+1}{3^8}$$

(שני הילדים הראשונים יתאכזבו אם כל החבילות ינתנו לילד השלישי או שהחבילה הראשונה תינתן לילד השני והיתר ינתנו ליד השלישי).

$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1+1+1}{3^8}$$

(הילדים הראשון והשלישי יתאכזבו אם כל החבילות ינתנו לילד השני או שבדיוק אחת מבין החבילות הראשונה והשניה ינתנו לילד השלישי ויתר החבילות ינתנו לילד השני).

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1+1+1+1+1}{3^8}$$

(הילדים השני והשלישי יתאכזבו אם את כל החבילות יקבל הילד הראשון או שהילד השני יקבל את החבילה הראשונה ואת היתר יקבל הילד הראשון או שהילד השלישי יקבל בדיוק את אחת מבין החבילות הקטנות ואת היתר יקבל הילד הראשון או שהילד השני יקבל את החבילה שבה סוכריה אחת, הילד השלישי יקבל את החבילה שבה שתי סוכריות ואת היתר יקבל הילד הראשון).

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$$

שלומי