הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 9

שלומי

שאלה 1

פונקצית הצפיפות של משתנה אחיד בקטע $(0,b)$ היא $\frac{1}{b}$ בקטע $(0,b)$ ו 0 בנקודות אחרות.

מתקיים $E(X^n)=\int_0^b \frac{1}{b}x^n dx=\frac{1}{b(n+1)}x^{n+1}\Big]_0^b=\frac{b^n}{n+1}$.

כאשר $b\le 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}E(X^n)=0$. כאשר $b>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}E(X^n)=\infty$.

נתן גם הסבר אינטואיטיבי לכך: אם מתקבלים רק ערכי X קטנים מ 1, אז בכל מקרה החזקה ה n- ית שואפת לאפס. מכיון שמדובר בהתפלגות רציפה, אז גם אם $b=1$, אז הערך 1 מתקבל בהסתברות אפס. אם $b>1$, אז בהסתברות חיובית X מקבל ערכים גדולים מ 1 שחזקתם ה n- ית שואפת לאינסוף.

שאלה 2

א. נגדיר משתנה מקרי X המקיים $P(X=0)=1$. התוחלת של משתנה זה היא 0 והוא בכל מקרה לא סוטה מהתוחלת. מתקיים $E(X-0)^2=0$.

הערה: משתנה שמקבל בודאות ערך מסוים יחיד נקרא משתנה מנוון.

ב. קיים משתנה כזה.

נגדיר משתנה X המקיים $P(X=5)=1$. תוחלתו היא 5 והוא בכל מקרה לא סוטה מהתוחלת.

שאלה 3

ב.

$$E(X(X-1))=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)k(k-1)=\sum_{k=2}^{\infty}P(X=k)k(k-1)=$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k(k-1)=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=$$
$$=\lambda^2\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\overset{*}{=}\lambda^2$$

* בתוך ה Σ יש סכום הסתברויות של משתנה $P(\lambda)$.

ג.

$$E(X^2)=E(X(X-1)+X)=E(X(X-1))+E(X)=\lambda^2+\lambda$$
$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda$$

ד.

$$E(2^X)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}2^k=\frac{e^{-\lambda}}{e^{-2\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!}\overset{*}{=}\frac{e^{-\lambda}}{e^{-2\lambda}}=e^{\lambda}$$

* בתוך ה Σ יש סכום הסתברויות של משתנה $P(2\lambda)$.

ה.

$$E\left((2^X)^2\right)=E(4^X)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}4^k=\frac{e^{-\lambda}}{e^{-4\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-4\lambda}\frac{(4\lambda)^k}{k!}\overset{*}{=}\frac{e^{-\lambda}}{e^{-4\lambda}}=e^{3\lambda}$$

* בתוך ה Σ יש סכום הסתברויות של משתנה $P(4\lambda)$.

$$Var\left(2^X\right) = E\left(\left(2^X\right)^2\right) - E^2\left(2^X\right) = e^{3\lambda} - e^{2\lambda}$$