<u>הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 8</u>

שלומי

<u>שאלה 1</u>

<u>סעיף א'</u>

כדי ש Z יקבל את הערך z צריך שהמשתנה X יקבל ערך של לפחות z.

$$P(Z=z)=\sum_{X=z}^{\infty}P(X=x)P(Z=z\mid X=x)=\sum_{X=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$
$$=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{x!}{z!(x-z)!}p^z(1-p)^{x-z}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

בתוך ה $\sum$ יש פיתוח טיילור של $e^{\lambda(1-p)}$. לכן הביטוי כולו שווה ל $e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^z}{z!}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^z}{z!}e^{\lambda(1-p)}$.

כעת נתן <u>הוכחה בדרך שניה</u> שבה השלבים הראשונים זהים לאלה שבהוכחה הראשונה.

$$P(Z=z)=\sum_{X=z}^{\infty}P(X=x)P(Z=z\mid X=x)=\sum_{X=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\binom{x}{z}p^z(1-p)^{x-z}=$$
$$=\sum_{x=z}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{x!}{z!(x-z)!}p^z(1-p)^{x-z}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{x=z}^{\infty}\frac{\lambda^{x-z}(1-p)^{x-z}}{(x-z)!}=$$
$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{z!}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$$

כעת נחלק ונכפיל בגודל $e^{-\lambda(1-p)}$ ונקבל $\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^z}{e^{-\lambda(1-p)}z!}\sum_{y=0}^{\infty}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^y}{y!}$.

כעת בתוך ה- $\sum$ יש סכום הסתברויות של משתנה $P(\lambda(1-p))$. מכיון שזהו משתנה מקרי, אז הסכום הוא 1 ונקבל ביטוי $\frac{(\lambda p)^z}{z!}e^{-\lambda p}$ (חלוקת $e^{-\lambda}$ ב $e^{-\lambda(1-p)}$ נותנת $e^{-\lambda p}$).

<u>סעיף ב'</u>

אם מגיעים לבנק x לקוחות, אז ההתפלגות המותנה של מספר הפונים לכספר היא $Bin(x,0.5)$ ולכן היא בעל תוחלת $0.5x$. התוחלת השלמה היא $E(0.5X)=0.5E(X)=0.5\cdot 8=4$.

לפי סעיף א' התפלגות מספר הפונים לכספר היא $P(8\cdot 0.5)$. התוחלת של משתנה פואסוני שווה לפרמטר שלו ולכן כאן היא שווה ל 4.

<u>שאלה 2</u>

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)xdx=\int_0^1 x^2dx+\int_5^6 0.5xdx=\frac{1}{3}x^3]_0^1+\frac{1}{4}x^2]_5^6=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(6^2-5^2\right)$$

<u>שאלה 3</u>

$X\sim G\left(\frac{1}{3}\right)$ לכן $E(X)=\frac{1}{1/3}=3$. $Y\sim G\left(\frac{2}{3}\right)$ לכן $E(Y)=\frac{1}{2/3}=1.5$.

לא יודעים מראש מי מבין X ו Y יקבל ערך מינימלי. אבל תמיד בהטלה הראשונה מקבלים "עץ" או "פלי". לכן המינימום הוא משתנה מנוון שתמיד מקבל את הערך 1. לכן תוחלתו היא 1.

לא יודעים מראש מי מבין X ו Y יהיה המינימלי ומי יהיה המכסימלי. אבל תמיד מתקיים $W+Z=X+Y$.

לכן מתקיים $E(W+Z)=E(X+Y)$ ולכן $E(W)+E(Z)=E(X)+E(Y)$ ולכן

$E(Z)=E(X)+E(Y)-E(W)=3+1.5-1=3.5$.

נחשב את $E(Z)$ גם בדרך נוספת:

בסיכוי $\frac{1}{3}$ מחכים לאחר ההטלה הראשונה ל"פלי" ובסיכוי $\frac{2}{3}$ מחכים לאחר ההטלה הראשונה ל"עץ".

לכן מספר ההטלות לאחר ההטלה הראשונה הוא בעל תוחלת $\frac{1}{3}\cdot 1.5+\frac{2}{3}\cdot 3=2.5$. בתוספת ההטלה הראשונה,

התוחלת היא $2.5+1=3.5$.
