הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 7

שלומי

שאלה 1

א. $$E(X)=\sum P(X=x)x=0.2\cdot 1+0.3\cdot 2+0.5\cdot 4$$

ב. $$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+P(X\geq 3)+P(X\geq 4)+0+0+\cdots=$$
$$=1+(0.3+0.5)+0.5+0.5$$

ג. $$E(X^3)=\sum P(X=x)x^3=0.2\cdot 1^3+0.3\cdot 2^3+0.5\cdot 4^3$$

שאלה 2

ההסתברות שביום מסוים בשנה אין לילד מסוים יום הולדת היא $1-\frac{1}{365}$.

ההסתברות שביום מסוים בשנה אין לאף ילד יום הולדת היא $\left(1-\frac{1}{365}\right)^{20}$.

ההסתברות שביום מסוים בשנה יש ללפחות ילד אחד יום הולדת היא $1-\left(1-\frac{1}{365}\right)^{20}$.

זו היא התוחלת של כל האינדיקטור שביום מסוים בשנה יש ללפחות ילד אחד יום הולדת.
המשתנה שמייצג את מספר הימים בשנה שבהם יש ללפחות ילד אחד יום הולדת שווה לסכום האינדיקטורים האלה.

לכן תוחלתו שווה לסכום התוחלות שלהם שהיא $365\left[1-\left(1-\frac{1}{365}\right)^{20}\right]$.

שאלה 3

א.
כל קבוצה של 20 צמתים מהווה קליק אם בין כל זוג מצמתיה יש קשת. בקבוצה כזאת יש $\binom{20}{2}=190$ זוגות של צמתים. לכן ההסתברות שהיא מהווה קליק היא 0.5^{190}. זו גם תוחלת האינדיקטור לכך שקבוצה מסוימת מהווה קליק. בגרף יש $\binom{100}{20}$ קבוצות של 20 צמתים. מספר בקבוצות בנות 20 צמתים שמהווים קליק שווה לסכום האינדיקטורים האלה. לכן תוחלתו שווה ל $\binom{100}{20}0.5^{190}$.

תוחלת מספר הקבוצות הבלתי תלויות שווה לתוחלת מספר הקליקים.

מתקיים $\binom{100}{20}0.5^{190}=2\cdot\binom{100}{20}0.5^{190}=E(X)+E(Y)=E(X+Y)$.

$$\binom{100}{20}0.5^{190} < 100^{20} \cdot 0.5^{190} < \left(2^{7}\right)^{20} \cdot 0.5^{190} = 2^{140} \cdot 0.5^{190} < 1$$

ב. המספר הכולל של קליקים וקבוצות בלתי תלויות הוא מספר שלם. אילו הוא היה מקבל רק ערכים גדולים מ 0 (זאת אומרת גדולים או שווים ל 1), אז תוחלתו היתה חייבת להיות שווה לפחות ל 1. אבל ראינו שזה לא קורה. לכן אם מבצעים את ההגרלה כזאת, אז בהסתברות חיובית לא יתקבלו אף קליק ואף קבוצה בלתי תלויה. זה מצביע על כך שבגרף בעל 100 צמתים יתכן שלא יהיו קליקים או קבוצות בלתי תלויות בגודל 20 צמתים.
