הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 6

שלומי

שאלה 1

בהרצאה הראנו שאם נתונים זוג משתנים ב"ת $X \sim Bin(n,p)$ ו $Y \sim Bin(m,p)$ אז אם $Z = X+Y$ אז $Z \sim Bin(n+m,p)$. נחזור כאן על הוכחה זו.

$$P(Z=z)=\sum_x P(X=x,Y=z-x)=\sum_x P(X=x)P(Y=z-x)=$$

$$=\sum_x \binom{n}{x}p^x q^{n-x}\binom{m}{z-x}p^{z-x}q^{m-(z-x)}=p^z q^{n+m-z}\sum_x \binom{n}{x}\binom{m}{z-x}=\binom{n+m}{z}p^z q^{n+m-z}$$

כעת נחשב את ההתפלגות המותנה.

$$P(X=x \mid Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x)P(Y=z-x)}{P(Z=z)}=$$

$$=\frac{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\binom{m}{z-x}p^{z-x}q^{m-(z-x)}}{\binom{n+m}{z}p^z q^{n+m-z}}=\frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

קבלנו שההתפלגות המותנה היא $HG(z;n,m)$.

אינטואיציה לתוצאה: היו z הצלחות. כל אחת מההצלחות יכולה להיבחר מבין n הראשונים או m האחרים, כאשר כל הצלחה יכולה להיבחר רק פעם אחת (אין החזרות בבחירת מיקום ההצלחות).

שאלה 2

הצפיפות המותנה של X בהינתן Z נתונה לפי הנוסחא $f_{X|Z}(x)=\frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)}$.

בכל נקודה (x,z) שיכולה להתקבל מתקיים כאן $f_{X,Z}(x,z)=f_{X,Y}(x,z-x)=f_X(x)f_Y(z-x)=1\cdot 1=1$.

לפי מה שראינו בכיתה מתקיים $f_Z(0.8)=0.8$. לכן מתקיים $f_{X|Z=0.8}=\frac{1}{0.8}=1.25$ בתחום האפשרי של X בהינתן ש $(Z=0.8)$ שהוא בין 0 ל 0.8.

לפי מה שראינו בכיתה מתקיים $f_Z(1.3)=2-1.3=0.7$. לכן מתקיים $f_{X|Z=1.3}=\frac{1}{0.7}$ בתחום האפשרי של X בהינתן ש $(Z=1.3)$ שהוא בין 0.3 ל 1.

האינטואיציה שמאחורי התשובה היא שלכל נקודה בתחום האפשרי יש אותה צפיפות.
שימו לב שהצפיפות המותנה גדולה מ 1. זה מתיישב טוב עם העובדה שהתחום האפשרי הוא באורך קטן מ 1, והרי האינטגרל על פונקצית הצפיפות בתחום האפשרי צריך להיות שווה ל 1.

<u>שאלה 3</u>

המשתנה Z יכול לקבל כל ערך אי שלילי. עבור כל $z \ge 0$ מתקיים:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = 1 - P(X > z, Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) =$$
$$= 1 - e^{-z}e^{-z} = 1 - e^{-2z}$$

לכן, פונקצית ההסתברות המצטברת היא של משתנה $\exp(2)$. לכן $Z \sim \exp(2)$.

<u>שאלה 4</u>

קבוצת הערכים האפשריים שיכולה לקבל פונקצית ההסתברות המצטברת היא הקטע $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right)$ ובנוסף הנקודות המבודדת 0 ו 1. שימו לב שהקטע הוא חצי פתוח.

בנקודות שנמצאות משמאל למלבן או מתחתיו ההסתברות המצטברת היא אפס.

בנקודות שנמצאות מעל המלבן ומימינו ההסתברות המצטברת היא 1.

כל נקודה בתוך הרבוע או על שפתו שאינה הקודקוד הימני העליון, היא קטנה לפחות בקורדינטה אחת מלפחות שניים מקודקודי הרבוע. לכל קודקוד יש הסתברות $\frac{1}{8}$.

למשל הנקודה $(1, 0.99)$ קטנה בלפחות קורדינטה אחת מהנקודה $(1,0)$ וגם מהנקודה $(1,1)$. היא גם קטנה באחת הקורדנטות מנקודות פנימיות מסוימות. לכן גם לערך $\frac{3}{4}$ לא ניתן להגיע.

לעומת זאת הנקודה $(0.1, 0.1)$ גדולה בשתי הקורדינטות רק מהנקודה $(0,0)$ מבין הנקודות ששתי הקורדינטות שלהן הן שלמות. בנקודה $(0,0)$ ההסתברות המצטברת היא $\frac{1}{8}$. אם שואפים אל לנקודה $(0,0)$ מבתוך המלבן, אז ההסתברות המצטברת שואפת ל $\frac{1}{8}$.
