

הסתברות וסטטיסטיקה / פתרון תרגיל 5

שלומי

שאלה 1

$$. P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = (1 - e^{-2\lambda}) - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \text{ מתקיים}$$

$$. P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f_X(x) dx = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ גם מתקיים}$$

מכיון שמשנתנה מעריכי הוא משנתנה רציף ומכיון שמשנתנה רציף מקבל כל ערך של נקודה בודדת בסיכוי אפס, אז

$$. P(1 \leq X < 2) = P(1 \leq X \leq 2) \text{ מתקיים}$$

שאלה 2

יהי Y - המינימום בין המרחקים של X מ 0 ומ 1.

ראשית נבחין שטווח הערכים שהמשנתנה Y יכול לקבל הוא הקטע שבין 0 ל 0.5 .

עבור כל $y < 0$ מתקיים $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$.

עבור כל $y > 0.5$ מתקיים $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$.

עבור כל $0 \leq y \leq 0.5$ מתקיים

$$. F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(0 \leq X \leq y) + P(1 - y \leq X \leq 1) = y + (1 - (1 - y)) = 2y$$

קבלנו ש $Y \sim U(0, 0.5)$.

שאלה 3

באופן כללי מתקיים $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$. כאן מתקיים $\int_1^2 f_X(x) dx = 1$ ולכן מתקיים $\int_1^2 c x dx = 1$ ולכן מתקיים

$$. c = \frac{2}{3} \text{ ולכן מתקיים } 0.5c(2^2 - 1^2) = 1$$

עבור $X < 1$ מתקיים $F_X(x) = 0$. עבור $X > 2$ מתקיים $F_X(x) = 1$.

$$. F_X(x) = \int_1^x f_X(z) dz = \int_1^x \frac{2}{3} z dz = \frac{1}{3} z^2 \Big|_1^x = \frac{1}{3} (x^2 - 1) \text{ מתקיים } 1 \leq x \leq 2$$

שימו לב שכצפוי פונקציית ההסתברות המצטברת רציפה בכל נקודה כולל הנקודות 1 ו 2.

שאלה 4

מתקיים עבור $z < 0$: $F_Z(z) = 0$.

מתקיים עבור $0 \leq z \leq 1$: $F_Z(z) = P(X=0, Y \leq z) \stackrel{\text{independent}}{=} P(X=0)P(Y \leq z) = 0.5z$.

מתקיים עבור $1 < z \leq 2$: $F_Z(z) = P(X=0) + P(X=1, Y \leq z-1) = 0.5 + 0.5(z-1) = 0.5z$.

מתקיים עבור $z > 2$: $F_Z(z) = 1$.

קבלנו שפונקציית ההסתברות המצטברת של המשתנה Z היא רציפה. לכן לפי ההגדרה זהו משתנה רציף. למעשה קבלנו שהסכום מתפלג $U(0,2)$.

שאלה 5

מתקיים עבור כל $y \geq 2$ שלם : $P(X=1, Y=y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} \cdot \frac{2}{3}$.

מתקיים עבור כל $x \geq 2$ שלם : $P(X=x, Y=1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{3}$.

הסבר

אחד משני המשתנים מקבל את הערך 1. עד ולא כולל ההטלה שבה מתקבלת התוצאה האחרת, מתקבלות רק תוצאות שזהות לתוצאת ההטלה הראשונה.
