הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 4

שלומי

שאלה 1

בכל הטלה יש סיכוי של $\frac{1}{3}$ לקבל תוצאה של 4 או 6 וזאת באופן ב"ת בהטלות האחרות. כאשר מחכים להצלחה הראשונה בסדרת ניסיונות ב"ת שווי הסתברות, אז זמן ההצלחה הראשונה מתפלג גיאומטרית. לכן מספר ההטלות עד קבלת 4 או 6 מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$.

נראה שמספר הנסיונות עד קבלת 4 וגם 6 אינו מתפלג בינומית שלילית. כאן צריכים לצבור שתי הצלחות, אחת של קבלת 4 ושניה של קבלת 6. מספר הניסיונות עד קבלת הראשון שבהם מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$. לאחר ההצלחה הראשונה, מחכים רק להצלחה מהסוג האחר. כעת בכל שלב יש רק סיכוי של $\frac{1}{6}$ לקבל אותה. מספר הניסיונות שלאחר ההצלחה הראשונה מתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$. לכן מספר הניסיונות הכולל מתפלג כסכום של משתנה המתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$ ומשתנה המתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$. סכום של שניי משתנים גיאומטרים שווי פרמטר ב"ת מתפלג בינומית שלילית. אבל כאן הסכום הוא של משתנים גיאומטרים שוני פרמטר.

שאלה 2

$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}\cong\frac{1}{e}$ (דרושים 100 כשלונות).

$P(X=1)=\binom{100}{1}\cdot\frac{1}{100}\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{99}=\left(1-\frac{1}{100}\right)^{99}\cong\frac{1}{e}$ (דרושה בדיוק הצלחה אחת).

למעשה, לפי משפט קירוב שלמדנו, משתנה $Bin\left(100,\frac{1}{100}\right)$ מקבל כל ערך נמוך בהסתברות קרובה להסתברות של משתנה $P\left(100\cdot\frac{1}{100}\right)$ לקבל את אותו ערך.

<u>שאלה 3</u>

נבצע סדרה של זוגות של הטלות. בהסתברות 1 נקבל באיזשהו שלב שתי תוצאות שונות בזוג הטלות.
אם הראשונה בזוג זה היא "עץ" והשניה היא "פלי", אז האינדיקטור יקבל את הערך 1. אם הראשונה בזוג זה היא "פלי" והשניה "עץ", אז האינדיקטור יקבל את הערך 0. לשתי האפשרויות האלה יש אותה הסתברות.

בכל זוג של הטלות יש סיכוי של $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$ שתוצאות שתי ההטלות הן זהות.

הסיכוי שב n זוגות של הטלות יתקבלו תוצאות זהות בכל זוג הוא $\left(\frac{5}{9}\right)^n$. עבור כל $\varepsilon>0$ קיים n, כך ש $\left(\frac{5}{9}\right)^n<\varepsilon$. לכן ההסתברות שבכל זוגות ההטלות יהיה שיוויון, קטנה מכל קבוע חיובי, ולכן היא שווה לאפס.

ב 5 הטלות יש לכל סדרת תוצאות הסתברות שהיא שבר שהמכנה שלו הוא 3^5 והמונה שלו הוא איזשהו שלם.
3^5 איננו מספר זוגי ולכן אי אפשר לחלק את האפשרויות האלה לשתי קבוצות זרות שוות הסתברות.

נתייחס גם <u>לשגיאה אפשרית</u>:
נראה שהסיכוי לקבל בסדרת ההטלות את הצירוף (פלי, עץ) לפני קבלת הצירוף (עץ, פלי) איננו שווה לחצי, למרות שבמבט ראשון זה כן עלול להראות כך.
אם בהטלה הראשונה מקבלים פלי, אז עם קבלת תוצאת עץ ראשונה, מתקבל הצירוף (פלי, עץ). לכן אם בהטלה הראשונה התקבל פלי, חייבים לקבל (פלי, עץ) לפני (עץ, פלי). לכן בסיכוי $\frac{2}{3}$ נקבל (פלי, עץ) לפני (עץ, פלי).
לכן בפתרון התייחסנו לזוגות של הטלות שבהן יש סימטריה בין שני הצירופים.

<u>שאלה 4</u>

מספר האפסים שווה למינימום בין מספר גורמי ה-5 ומספר גורמי ה-2. ברור שבמכפלה של גלן הודל יש יותר גורמי 2 מאשר גורמי 5. לכן מספר האפסים אצל גלן הודל שווה למספר הטבעיים מבין $\{5,10,15,20\}$ שהוא יבחר. לכן $X\sim HG(19;4,16)$.
לגבי גארי מאבוט, יתכן שיהיו לו פחות גורמי 2, ולכן מספר האפסים אינו שווה בהכרח למספר גורמי ה-5. לכן Y לא מתפלג $Bin\left(19,\frac{4}{20}\right)$.

אם לדלי קינג בוחר את המספר 25, אז יש בזה תרומה של שני גורמי 5. לכן אין כאן ספירה של בחירת מיוחדים מתוך אוכלוסיה של 6 מיוחדים (כפולות של 5 שבין 1 ל 30) ו 24 אחרים. לכן W לא מתפלג $HG(24;6,24)$.

המספר 25 יכול לתרום שני גורמי 5 גם עבור הארי קיין. לכן Z לא מתפלג $Bin\left(24,\frac{6}{24}\right)$.

(בנוסף גם כאן יתכן שמספר גורמי ה 2 קטן ממספר גורמי ה 5).
