הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 2

שלומי

שאלה 1

א. ביום שלישי יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון אם פעמיים לא ישתנה מזג האוויר או שפעמיים הוא ישתנה.
לכן ההסתברות היא $(1-p)^2 + p^2$.

ב. יהי C המאורע שביום שלישי יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון.
יהי B המאורע שביום שני יהיה אותו מזג אוויר כמו ביום ראשון.

$$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2 + p^2}$$

שאלה 2

א. הגרף קשיר אם יש בו 3 או 2 קשתות. לכן ההסתברות שהוא קשיר היא $0.5^3 + \binom{3}{2}0.5^2 \cdot 0.5 = 0.5$.

ב. נראה שההסתברות שהגרף קשיר היא בקירוב 1.
כדי שיהיה מסלול בין זוג צמתים נתון, די בכך שקיים צומת אחר שמחובר לשניהם (זהו תנאי מספיק אך לא הכרחי). עבור כל צומת אחר הסיכוי שהוא יהיה מחובר לשניהם היא $0.5^2 = 0.25$. לכן הסיכוי שהוא לא יהיה מחובר לשניהם הוא 0.75 . הסיכוי שאף צומת אחר לא יהיה מחובר לשניהם הוא 0.75^{98} .
לכן ההסתברות שבין שני צמתים נתונים לא יהיה מסלול אינה גדולה מ 0.75^{98} .
יש $\binom{100}{2}$ זוגות של צמתים. מכיון שהסתברות איחוד של מאורעות אינה גדולה מסכום ההסתברויות שלהם,
אז ההסתברות שיהיה לפחות זוג אחד של צמתים שאין ביניהם מסלול באורך 2 אינה גדולה מ
$\binom{100}{2} \cdot 0.75^{98}$. גודל זה הוא קטן מאוד.

שאלה 3

יהי A - המאורע שהאחרון מתאים.
יהי B - המאורע שתשעת הראשונים לא מתאימים.
משמעות המאורע B היא או שהעשירי מתאים.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{here}{=} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.9 \cdot 0.1 + 0.1} = \frac{9}{19}$$

אפשר להסתכל על הבעיה בצורה הבאה: בתחילה היו 11 מפתחות שאחד מהם הוא מיוחד ולמעשה איננו מפתח.
לאחר שהתברר שתשעת הראשונים לא מתאימים, נותרו שתי אפשרויות. האפשרות האחת היא שהעשירי מתאים והאפשרות האחרת היא שהמיוחד (האף מפתח) מתאים.

שאלה 4

נסתכל על מטבע הוגן מסוים. האינטואיציה שמאחורי התוצאה היא שבהינתן כל סכום של יתר ההטלות להוציא שלו, הוספת תוצאת ההוגן לסכום גורמת לסכום להיות זוגי בסיכוי חצי. אם סכום כל היתר אי זוגי, אז האחרון צריך להיות "עץ" כדי שהסכום יהיה זוגי. אם סכום כל היתר זוגי, אז האחרון צריך להיות "פלי".

נרשום גם את חישוב הסיכוי:

יהי A - המאורע שסכום ההטלות האחרות הוא זוגי.

יהי B - המאורע שההוגן הוא "עץ".

יהי E - המאורע שהסכום כולו הוא זוגי.

$$P(E)=P(\overline{A}\cap B)+P(A\cap\overline{B})\overset{independent}{=}P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=$$
$$=P(\overline{A})\cdot 0.5+P(A)\cdot 0.5=\left[P(\overline{A})+P(A)\right]\cdot 0.5=0.5$$

שאלה 5

א. נחשב הסתברות שלמה: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{5+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{7}{12}$.

ב. פתרון בדרך ראשונה

אם הכדור הראשון הוא כחול אז מדובר בכד הראשון בסיכוי $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{5}{7}$ ומדובר בכד השני בסיכוי $1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$. כעת כאשר משקללים את ההסתברויות האלה מקבלים שההסתברות להוציא בפעם הבאה כדור כחול היא $\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{4+1}+\frac{2}{7}\cdot\frac{0}{0+2}=\frac{4}{7}$.

פתרון בדרך שניה

יהי A - המאורע שהראשון כחול. יהי B - המאורע שהשני כחול.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\cdots$$.
