הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 12

שלומי

שאלה 1

המשתנה Y מקבל רק ערכים אי שליליים. כל קטע שמכיל רק נקודות אי שליליות מתקבל על-ידי המשתנה Y בהסתברות ששווה לפעמיים ההסתברות שהמשתנה X מקבל את אותו הקטע.
אפשר להסביר את הטענה בדרכים שונות המתבססות על שימוש בטבלת ההתפלגות המצטברת של משתנה נורמלי.
מתקיים למשל

$$\begin{aligned}
E(Y) &\geq P(0 \leq Y < 0.6)\cdot 0 + P(0.6 \leq Y < 2)\cdot 0.6 + P(Y \geq 2)\cdot 2 = \\
&= 2P(0.6 \leq X < 2)\cdot 0.6 + 2P(X \geq 2)\cdot 2 = \\
&= 2\cdot 0.6[P(X \geq 0.6) - P(X \geq 2)]\cdot + 2\cdot 2P(X \geq 2) = \\
&= 1.2[(1-\phi(0.6)) - (1-\phi(2))] + 4[1-\phi(2)] = 1.2[\phi(2)-\phi(0.6)] + 4[1-\phi(2)] = \\
&= 1.2[0.9772 - 0.7257] + 4[1-0.9772]
\end{aligned}$$

מכיון שהמשתנה Y מקבל כל קטע של מספרים חיוביים בהסתברות כפולה מזו שהמשתנה X מקבל את אותו קטע, אז הצפיפות של Y כפולה מזו של X בכל נקודה חיובית.
מתקיים עבור כל $y \geq 0$: $f_Y(y) = 2f_X(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

$$E(Y) = \int_0^\infty f_Y(y)ydy = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}ydy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}ydy$$

נציב $t = \frac{y^2}{2}$. מתקיים $dt = ydy$. נקבל ש $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}dt$. האינטגרל הוא אינטגרל של פונקצית צפיפות של משתנה $\exp(1)$ על כל התחום וככזה הוא שווה ל 1. לכן מתקיים $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

<u>שאלה 2</u>

נראה שהחוק החלש חל על הסדרה בכל מקרה וגם אם המשתנים הם תלויים.

עבור כל $i \geq 1$ מתקיים $E(Y_i) = 0$.

מתקיים בכל מקרה ש $\left|\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\right| \leq \sum_{i=}^{\infty} |Y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. עבור כל n סופי מתקיים תמיד $\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| \leq 1$.

לכן מתקיים בהסתברות 1: $\frac{\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right|}{n} \leq \frac{1}{n}$. עבור כל $\delta > 0$ נתון יתקיים

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{E(Y_i)}{n}\right| > \delta\right) = 0$. לכן החוק החלש חל על הסדרה.

<u>שאלה 3</u>

נראה שהסדרה $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית. מכאן ינבע שעל הסדרה חלים החוק החלש ומשפט הגבול המרכזי.

האי תלות נובעת מהאי תלות שיש בסדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ (הערכים שמקבלים משתנים מסוימים, לא משפיעים על הערכים שמקבלים אחרים).

מכיון שהמשתנים בסדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$הם שווי התפלגות אז המשתנים $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$הם שווי התפלגות – חלה על כל אחד מהם אותה חוקיות.

מכיון שהם שווי התפלגות אז לכולם יש את אותה שונות.

מתקיים $E\left(X_1^{\ 2}\right) \leq E\left(Y_1^{\ 2}\right) \leq E\left(Y_1^{\ 2}\right) - E^2(Y_1) = V(Y_1)$. מכיון שהשונות של המשתנים X_1 היא סופית,

אז $E\left(X_1^{\ 2}\right) < \infty$ ולכן $V(Y_1) < \infty$.
