

הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 11

שלומי

שאלה 1

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

X, Y הם כל אחד אינדיקטורים בעלי הסתברות חצי ולכן

$$E(X) = E(Y) = 0.5, \quad V(X) = V(Y) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$

(שונות של אינדיקטור בעל הסתברות p שווה ל $p(1-p)$.)

$$E(XY) = 0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

(XY מקבל את הערך 1 אם שניהם בניים, אחרת הוא מקבל את הערך 0, לכן תוחלתו שווה להסתברות

שהוא מקבל את הערך 1, אם התאומים הם זהים אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ שניהם בניים ואם הם אינם זהים אז

בסיכוי $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ שניהם בניים).

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$r(X,Y) = \frac{1/8}{1/4} = 0.5 \quad \text{לכן}$$

שאלה 2

מתאם של +1 מתקיים רק אם יש קשר לינארי עולה בין המשתנים.

מתאם של -1 מתקיים רק אם יש קשר לינארי יורד בין המשתנים.

כאן משתנה אחד מקבל 5 ערכים בהסתברות חיובית והאחר מקבל 6 ערכים בהסתברות חיובית, לכן לא

יתכן שיהיה קשר לינארי, ולא יתכן שיהיה מתאם של +1 או של -1.

אם המשתנים הם ב"ת אז מתקיים $Cov(X,Y) = 0$ ואז מתקיים $r(X,Y) = 0$.

אם מתקיים עבור כל $(1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 6)$: $P(X=x, Y=y) = \frac{1}{30} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$, אז המשתנים הם ב"ת.

שאלה 3

א. X הוא משתנה שמקבל רק ערכים אי שליליים. ראינו ש $E(X) = 1$. לכן לפי אי שיוויון מרקוב

$$. P(X \geq 50) \leq \frac{E(X)}{50} = \frac{1}{50}$$

ב. ראינו ש $V(X) = 1$. לפי אי שיוויון צ'בישב נוכל לקבל $. P(X \geq 50) \leq \frac{V(X)}{(50 - E(X))^2} = \frac{1}{49^2}$

ג. הסיכוי הוא $\frac{(100-50)!}{100!} = \frac{1}{\binom{100}{50} 50!}$ (במרחב המדגם יש $100!$ סידורים, אם 50 אלה מקבלים

את שלהם, אז נותר רק לחלק $100 - 50$ מכתבים בין $100 - 50$ אנשים אחרים).

ד. אינדיקטור מקבל רק ערכים של 0 ו 1 , לכן התוחלת שווה להסתברות שלו לקבל את הערך 1 .

$$. \frac{1}{\binom{100}{50} 50!}$$

ה. יש $\binom{100}{50}$ תת קבוצות של 50 אנשים.

ו. תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות של האינדיקטורים ולכן שווה ל $\frac{1}{50!} \cdot \binom{100}{50} = \frac{1}{\binom{100}{50} 50!}$.

ז. יהי Y - משתנה הסופר את מספר התת קבוצות שבהן כל בני הקבוצה מקבלים את המכתב שמיועד להם. ראינו ש $E(Y) = \frac{1}{50!}$. אם נפעיל את אי שיוויון מרקוב על המשתנה Y , נוכל לקבל

$$. P(Y \geq 1) \leq \frac{E(Y)}{1} = \frac{1}{50!}$$

ח. כדי שיתקיים $(X \geq 50)$ צריך שתהיה לפחות תת קבוצה אחת של 50 איש שבה כל האנשים

יקבלו את הכובע המיועד להם. לכן נדרש שיתקיים $(Y \geq 1)$. ראינו שמתקיים $. P(Y \geq 1) \leq \frac{1}{50!}$

$$. P(X \geq 50) \leq \frac{1}{50!}$$