

הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 10

שלומי

שאלה 1

א. לגבי כל בחירה של משתתף נתון, ההסתברות שאף אחד אחר לא יבחר את המספר שהוא בחר היא 0.99^{99} . לכן זהו הסיכוי שאף אחד לא יבחר את המספר שהוא בחר. יהי X - מספר האנשים שבחרים מספר שונה מכל אחד מהאחרים.

מתקיים $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ כאשר X_i הוא אינדיקטור לכך שאדם i בחר במספר שונה מכל האחרים.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100 \cdot 0.99^{99} \text{ מתקיים}$$

ב. החברה תרויח את הקופה אם אף אחד לא יבחר במספר שהיא הגרילה. הסיכוי לכך הוא 0.99^{100} . לכן תוחלת הרווח של החברה היא $0.99^{100} \cdot 100$. שונות האינדיקטור המציין את הזכיה של החברה ברווח היא $0.99^{100}(1 - 0.99^{100})$. מכיון שהרווח של החברה שווה למכפלה של אינדיקטור זה ב 100 , אז שונות הרווח של החברה היא $100^2 \cdot 0.99^{100}(1 - 0.99^{100})$.

ג. אם החברה תגריל מספר בין 51 ל 100 , אז היא תרויח את הקופה בסיכוי 1 . אחרת היא תרויח את הקופה בסיכוי $\left(\frac{49}{50}\right)^{100}$. לכן תוחלת הרווח של החברה היא $0.5 \cdot 100 + 0.5 \left(\frac{49}{50}\right)^{100} \cdot 100$.

ד. אם האדם הראשון יבחר מספר באופן אחיד וכולם יעתיקו את בחירתו, אז הבחירה של כל משתתף היא אחידה ויש תלות בין המשתתפים והרווח של החברה יגדל ל $0.99 \cdot 100$.

אם כל משתתף יבחר מספר שונה מכל האחרים כך שלכל צירוף יהיה סיכוי שווה, אז הבחירה של כל משתתף היא אחידה ויש תלות בין המשתתפים. כאן החברה בכל מקרה לא תרויח כלום.

שאלה 2

א. זה יכול לקרות רק אם הסדרה היא של תוצאות "6" במקומות האי זוגיים ותוצאות "5" במקומות הזוגיים או להפך. ההסתברות לכך היא $2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$.

ב. זוג הטלות סמוכות מסתכם ב 11 אם באחת מהן התקבל "5" ובאחרת התקבל "6". זה קורה בסיכוי $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. יש כאן סכום של 9 אינדיקטורים שלכל אחד מהם יש תוחלת $\frac{1}{18}$. לכן

$$9 \cdot \frac{1}{18} = 0.5 \text{ תוחלת הסכום היא}$$

ג נסתכל על 9 אינדיקטורים שכל אחד מהם ייצג קבלת סכום 11 בשתי הטלות סמוכות.

$$V(X_i) = \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} : i \text{ לכל}$$

עבור i, j שהם לא סמוכים מתקיים $Cov(X_i, X_j) = 0$ כי אין תלות ביניהם.

עבור X_i, X_{i+1} מתקיים

$$Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i)E(X_{i+1}) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}$$

(1) כדי שיתרחשו X_i וגם X_{i+1} צריך לקבל רצף 565 או רצף 656.

יש 9 אינדיקטורים ויש 8 זוגות של אינדיקטורים שכנים לכן

$$V(X) = 9V(X_1) + 2 \cdot 8Cov(X_1, X_2)$$
