הסתברות וסטטיסטיקה/ פתרון תרגיל 1

שלומי

שאלה 1

לפי עקרון ההכלה וההפרדה מתקיים $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

לכן מתקיים כאן $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.8+0.7-0.9=0.6$.

$\overline{A}\cup\overline{B}$ הוא המשלים של $A\cap B$ לכן מתקיים $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cap B)=1-0.6=0.4$.

הערה

רק לפעמים מתקיים $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. אם מתקיים $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ אז נאמר שזוג המאורעות A ו B הם זוג מאורעות בלתי תלויים.

שאלה 2

א. נראה על-ידי מתן דוגמא נגדית שהטענה אינה נכונה.

נניח שמרחב המדגם הוא מרחב סימטרי של הטלת קוביה בודדת.

עבור כל $1\le i<\infty$ יוגדר $A_i=\{1,2,3\}$.

עבור כל i זוגי יוגדר $B_i=\{1,2\}$ ועבור כל i אי זוגי יוגדר $B_i=\{3,4\}$.

כך עבור כל $1\le i<\infty$ מתקיים $P(B_i)=\frac{2}{6}<\frac{3}{6}=P(A_i)$.

אך מתקיים $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\frac{3}{6}<\frac{4}{6}=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)$.

ב. נראה שהטענה נכונה.

נראה שמתקיים $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$ ולכן לפי אחת התכונות של מרחב הסתברות מתקיים

$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\le P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

מאורע מורכב מאוסף נקודות אלמנטריות. כל נקודה a ששייכת ל $\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ שייכת לאיזשהו B_i עבור איזשהו i. לכן היא שייכת גם ל A_i עבור אותו אינדקס. לכן היא שייכת גם ל $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

שאלה 3

א. מרחב המדגם הוא בגודל $2\binom{10}{2} = 10\cdot 9$. במאורע אפשר לבחור כל זוג מספרים שונים, אבל המספר הגדול יותר חייב להיות בפעם השניה. לכן גודל המאורע הוא $\binom{10}{2}$. לכן ההסתברות המבוקשת היא 0.5.

הערה

בשתי הפעמים מתקבלות תוצאות שונות. הסיכוי שהראשונה גדולה מהשניה שווה לסיכוי שהשניה גדולה מהראשונה.

ב. מרחב המדגם הוא בגודל 10^2. המאורע הוא בגודל $\binom{10}{2}$, כי חייבים לבחור שתי תוצאות שונות ולבחור את התוצאה הגבוהה יותר לפעם השניה. ההסתברות היא $0.5 > \frac{45}{100} = \frac{\binom{10}{2}}{10^2}$.

הערה

כאן הסיכוי נמוך יותר, כי יתכן גם שיוויון. למעשה, אם אין שיוויון, אז הסיכויים שהראשון גדול מהשני שווים לסיכויים שהשני גדול מהראשון.

שאלה 4

א. מרחב המדגם הסימטרי הוא בגודל 3^8 נקודות. משריינים שני מקומות לכל כל ספרה ואחר-כך בשני המקומות האחרונים מרשים כל צירוף. הבעיה היא שמצבים נספרים יותר מפעם אחת. יתכן שהספרה 1 תשוריין במקומות 1 ו 2 ותופיע בנוסף במקום 4. אותו מצב יכול להתקבל אם היא תשוריין במקומות 1 ו 4 ותופיע בנוסף במקום 2.

ב. מספר כללי של המספרים- 3^8 .

מספר האפשרויות ללא ספרה מסוימת- $3\cdot 2^8$ (מכפילים ב 3 לבחירת הספרה שצריכה להיות חסרה בכל אחד מיתר המקומות בוחרים באחת מתוך שתי הספרות האחרות).

מספר האפשרויות כאשר ספרה מסוימת מופיעה רק פעם אחת- $3\cdot 8\cdot 2^7$ (בוחרים לה מקום וביתר המקומות מופיעות רק שתי האחרות ושוב מכפילים ב 3 לבחירת הספרה החסרה).

מספר האפשרויות ללא שתי ספרות- 3.

מספר האפשרויות כך ששתי ספרות מיוצגות רק פעם אחת- $3\cdot 8\cdot 7$.

מספר האפשרויות כך שספרה אחת מיוצגת פעם אחת ואחרת לא מיוצגת- $3\cdot 2\cdot 8$

(3 אפשרויות לבחירת הספרה שלא תופיע, אחר-כך 2 אפשרויות לבחור ספרה שתופיע פעם אחת ואחר-כך בחירת המקום לספרה שתופיע פעם אחת).

נקבל הסתברות $\frac{3^8-3\cdot 2^8-3\cdot 8\cdot 2^7+3+3\cdot 8\cdot 7+3\cdot 2\cdot 8}{3^8}=\frac{2940}{6561}$.

יהי A - המאורע שלפחות אחת הספרות לא מופיעה או מופיעה פעם אחת בלבד.

מתקיים $A=A_0\cup A_1\cup B_0\cup B_1\cup C_0\cup C_1$, כאשר A_0 הוא המאורע שהספרה 1 לא מופיעה, A_1 הוא המאורע ש 1 מופיעה פעם אחת, ובדומה המאורעות האחרים מתייחסים לאי הופעה או הופעה פעם אחת של הספרות האחרות.

מתקיים למשל $|A_0|=2^8$, $|A_1|=8\cdot 2^7$, $|A_0\cap A_1|=0$, $|A_0\cap B_0|=1$, $|A_1\cap B_1|=8\cdot 7$,

$|A_0\cap B_1|=8$ וכל חיתוך של שלושה מבין ששת המאורעות הוא ריק.

ג. או שיש ספרה אחת שמופיעה ארבע פעמים ושתי ספרות שמופיעות פעמיים או שיש שתי ספרות שמופיעות שלוש פעמים וספרה אחת שמופיעה פעמיים. בכל אחד משני המקרים, צריך לבחור את הספרה שתופיע מספר שונה של פעמים מהאחרות. אחר-כך צריך לבחור את המקומות שבהן כל ספרה תופיע.

נקבל הסתברות

$$\frac{3\cdot\binom{8}{4}\binom{4}{2}+3\binom{8}{3}\binom{5}{3}}{3^8}=\frac{2940}{6561}$$

שאלה 5

נראה שהתשובה היא 24.

כל ספרה של 0 שבסוף המספר נוצרת על-ידי צירוף של מכפלה של גורם 5 וגורם 2.

לכן מספר האפסים שווה למינימום בין מספר גורמי ה 5 ומספר גורמי ה 2.

יש בין 100 הטבעיים הראשונים, 20 מספרים שהם כפולות של 5. מתוכם בכל אחד מארבעת המספרים 25,50,75,100 יש שני גורמי 5. לכן יש 24 גורמי 5.

ברור שיש ב !100 יותר גורמי 2 מאשר גורמי 5 (יש 50 מספרים זוגיים ולחלקם יש אף יותר מגורם 2 אחד). לכן מספר האפסים נקבע על פי מספר גורמי ה 5.
